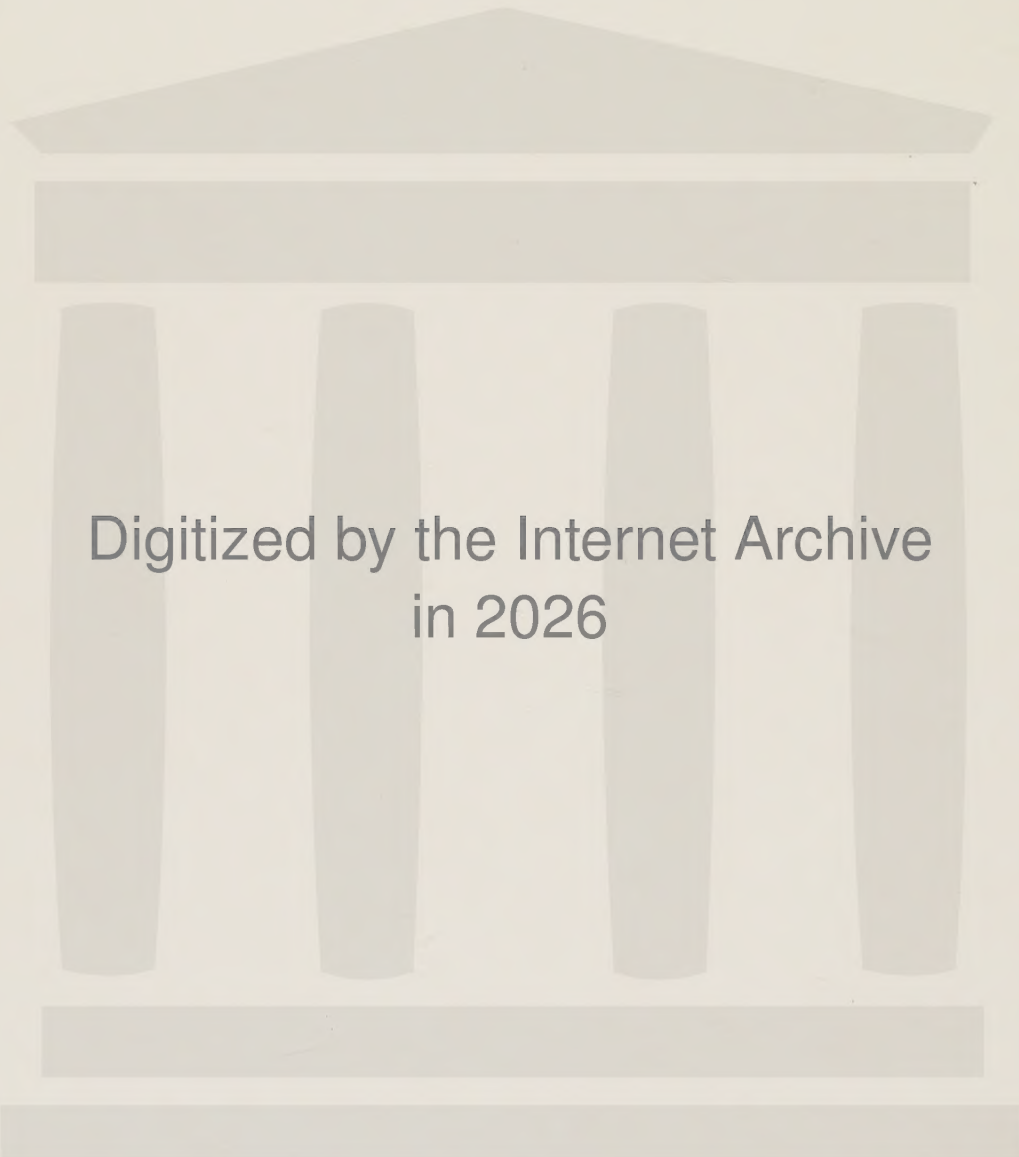


A Müller

Frankfurt a M 1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550820_0012

DIE METHODE DER KOMPLEXEN ZEIT UND IHRE ANWENDUNG
AUF DIE PAARPRODUKTION IN STARK ZEITABHÄNGIGEN
FELDERN

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Natur-
wissenschaftlichen Fakultät der Johann-
Wolfgang-Goethe Universität zu

Frankfurt am Main



von

Angelika Müller

aus

Königstein im Taunus

Frankfurt am Main

1979

THE UNIVERSITY OF LEIDEN
LIBRARY
LEIDEN

UNIVERSITY OF LEIDEN

UNIVERSITY OF LEIDEN
LIBRARY
LEIDEN



UNIVERSITY OF LEIDEN

UNIVERSITY OF LEIDEN

UNIVERSITY OF LEIDEN

Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereichs Physik
der Johann-Wolfgang-Goethe-Universität zu
Frankfurt am Main

Dekan : Prof. Dr. W. Martienssen

Leiter der Arbeit : Prof. Dr. W. Greiner

Erstgutachter : Prof. Dr. W. Greiner

Zweitgutachter : Prof. Dr. W. Kegel

Tag der mündlichen Prüfung:

29. NOV. 1979

Zusammenfassung

Die Fortsetzung der Wegintegralmethode in komplexe Zeiten erlaubt die Behandlung der kosmologischen Paarproduktion in einer Robertson-Walker-Metrik. Dabei werden verschiedene Modelle für das Expansionsgesetz $R(t)$ anhand der Einsteinschen Feldgleichungen und einer allgemein formulierten Zustandsgleichung $p = \alpha \rho$ diskutiert. Es ergibt sich eine Übereinstimmung mit der beobachteten Teilchenzahl für eine Zustandsgleichung mit $\alpha \rightarrow 1$. Die Bedeutung dieses Resultates für die Entstehung des Universums wird im Zusammenhang mit der Zustandsgleichung der Materie bei hohen Energien und Dichten diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

	<u>Seite</u>
(1) Einleitung	1
(1.1) Literaturüberblick	2
(1.2) Vorbemerkungen zur Kosmologie	8
(2) Die Wegintegralmethode und ihre Fortsetzung im Komplexen.	12
(2.1) Die Definition des Wegintegrals	12
(2.2) Das Wegintegral für ein freies Teilchen	18
(2.3) Äquivalenz der Wegintegralmethode zur "normalen" Quantenmechanik	22
(2.4) WKB-Näherung und Ausdehnung der Wegintegral- methode auf komplexe Zeiten	24
(2.5) Beispiel: Das elektrische Feld	31
(3) Die allgemeine Robertson-Walker-Metrik	39
(3.1) Die Wirkungskfunktion	39
(3.2) Die Erzeugungsrate	42
(4) Teilchenerzeugung im de-Sitter-Raum	46
(4.1) Der de-Sitter-Raum	46
(4.2) Die Erzeugungsrate	48
(4.3) Vergleich mit der exakten Lösung	53
(4.4) Die Teilchenzahl	55
(4.5) Der Einfluß des Ereignishorizontes	58
(5) Physikalische Teilchenerzeugung	61
(5.1) Das ultrarelativistische Fermigas	61
(5.2) Die verallgemeinerte Zustandsgleichung	66

(5.3) Diskussion der Ergebnisse	73
(5.4) Diskussion eines Weltmodells mit konformaler Metrik und dem Expansionsgesetz $R^2 = R_0^2 + R_1^2 \eta^2$	84
(6) Untersuchung eines anisotropen Weltmodells	87
(6.1) allgemeine Modelle und das Kasner-Universum	87
(6.2) Teilchenerzeugung im Kasner-Universum	89
(6.3) Isotropisierung des Raumes durch Teilchen- erzeugung	95
(7) Diskussion	98

Anhang

A1 Äquivalenz der Hamiltongleichung und der Geodätischen	101
A2 Die Separation der Hamilton-Jacobi-Gleichung	104
A3 Das Zeldovich-Modell für Materie hoher Dichte	106
A4 Untersuchungen zur Zustandsgleichung $p = \varrho$	108

Literaturverzeichnis

Danksagung

Lebenslauf

1. Einleitung

Die Möglichkeit der Paarerzeugung wurde zuerst von Dirac ⁽¹⁾ im Jahre 1930 theoretisch vorausgesagt und kurz darauf durch die Entdeckung des Positrons von Anderson ⁽²⁾ bestätigt. Die Paarerzeugung in Teilchenstößen wurde seitdem praktisch für alle Elementarteilchen untersucht und nachgewiesen.

Daß auch ausgedehnte Felder zur Paarerzeugung führen können, wurde am Beispiel der Reflexion einer Welle an einer Potentialbarriere bereits von F. Sauter ^(3,4) 1931 exakt durchgerechnet.

Experimentell realisierbare Situationen für die Paarerzeugung aufgrund eines Phasenübergangs des Vakuums in ausgedehnten, starken Feldern wurden zuerst von Pieper und Greiner ⁽⁵⁾, Gershtein, Zeldovich ⁽⁶⁾ und B. Müller, H. Peitz, J. Rafelski und W. Greiner ⁽⁷⁾ vorgeschlagen und vor kurzem von zwei experimentellen Arbeitsgruppen ^(8,9) am UNILAC in der GSI bestätigt.

Diese experimentellen und theoretischen Untersuchungen befassten sich jedoch alle mit der Teilchenproduktion in elektromagnetischen Feldern.

Die Möglichkeit der Teilchenerzeugung in Gravitationsfeldern, und zwar auf der Grundlage der nicht-stationären klassischen Raum-Zeit in Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie wurde zuerst von Schrödinger ⁽¹⁰⁾ im Jahre 1939 und später von de Witt ⁽¹¹⁾ (1953) diskutiert. In der letzten Zeit, etwa seit 1968, hat dieses Thema zunehmendes Interesse gefunden.

1.1 Überblick über bisherige Arbeiten

Im Folgenden will ich einen Überblick über die Literatur zur Teilchenerzeugung im expandierenden Universum geben:

Die erste ausführliche Untersuchung der Paarproduktion während der frühen Expansionsphase des Universums wurde von L. Parker ^(12,13,14) durchgeführt. Er untersuchte quantisierte Spin-0 und Spin- $\frac{1}{2}$ -Felder in einer konform-flachen Robertson-Walker-Metrik

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \cdot (dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

und erhielt dabei das allgemeine Resultat, daß masselose Teilchen nicht erzeugt werden können, sowie, daß die Teilchen in Paaren mit genau gleichem, aber entgegengesetztem Impuls entstehen. Parker löste dazu die Klein-Gordon- bzw. die Dirac-Gleichung in der Hintergrundgeometrie und verglich seine Lösungen mit geeignet gewählten "adiabatischen" Zuständen, woraus er die Teilchenerzeugungsamplitude erhält. Die Methode ist nur dann eindeutig, wenn die Geometrie zu sehr frühen und sehr späten Zeiten statisch gewesen ist, weil sich nur dann der Begriff des "Teilchens" mittels adiabatischer Zustände eindeutig definieren läßt. Parker gibt keine expliziten Erzeugungsraten an, zeigt aber, daß in einem strahlungsdominierten Universum die Zahl der erzeugten Teilchen endlich ist. In einer weiteren Arbeit ⁽¹⁵⁾ behandelte Parker das minimal gekoppelte Klein-Gordon-Feld

$$(\square + \mu^2)\psi = 0$$

mit dem Ergebnis, daß die Teilchenerzeugung im wesentlichen zur Planck-Zeit t_p

$$t_p = (\hbar G/c^5)^{\frac{1}{2}} = 10^{-33} \text{ sec}$$

geschieht, und daß die erzeugte Teilchenzahl möglicherweise so groß sein kann, daß sie die bestehende Materie im Universum erklären könnte.

Verwendet Parker jedoch die konform gekoppelte Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + \mu^2 - \frac{1}{6} R_{\alpha\beta} \dot{\sigma}^{\alpha\beta}) \psi = 0$$

ist die Zahl der erzeugten Teilchen um viele Größenordnungen kleiner. Dies läßt vermuten, daß Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen (die kovariante Dirac-Gleichung ist mit Ausnahme des Massenterms konform invariant) ebenfalls nur in geringer Zahl erzeugt werden, was darin begründet liegt, daß bei Annäherung an die Singularität die kinetische Energie immer gegen Unendlich geht, die Teilchen sich also praktisch wie masselose Teilchen verhalten. Ist die Bewegungsgleichung konform invariant, so können die Teilchen in diesem Bereich die Expansion nicht wahrnehmen und daher auch nicht erzeugt werden. Dies entspricht der Rechnung von Rumpf ⁽¹⁶⁾, wonach bei konformer Kopplung die Wellenfunktionen in der Nähe der Singularität WKB-artige Lösungen haben, die nichtkonform gekoppelten hingegen nicht.

Mamaev et.al. ⁽¹⁷⁾ untersuchten die allgemeine Robertson-Walker-Metrik mit dem Expansionsgesetz

$$R(t) = R_0 t^q \text{ mit } 0 < q < 1$$

und gingen dabei nach derselben Methode wie Parker vor, behandelten aber das konform gekoppelte Klein-Gordon-Feld und nahmen geeignete Anfangsbedingungen für ihre Teilchenoperatoren an der Singularität an. Sie fanden ein Spektrum, das von denselben Parametern abhängt wie das in der vorliegenden Arbeit für die allgemeine Friedmann-Metrik errechnete Teilchenspektrum. Allerdings fällt das Spektrum für große Impulse nicht exponentiell ab, sondern nur mit einer Potenz. Dasselbe Resultat erhielt Rumpf ⁽¹⁶⁾, der im wesentlichen die Rechnungen von Ref ⁽¹⁷⁾ wiederholt und ebenfalls annahm, daß sich das Spin-0-Feld aus einem bezüglich der WKB-Lösungen definierten Vakuumzustand heraus entwickelt. Vermutlich hat das Potenzspektrum seine Ursache nicht in der Dynamik des Expansionsprozesses, sondern ist auf die Beschränkung des zur Verfügung stehenden Zeitintervalls in der Nähe der Singularität zurückzuführen.

Die Teilchenerzeugung im de-Sitter-Universum ist ebenfalls von mehreren Autoren untersucht worden. Gibbons und Hawking ⁽¹⁸⁾ berechneten mit der Wegintegralmethode das von einem Beobachter gesehene Teilchenspektrum, das infolge des mit dem Beobachter verknüpften Ereignishorizontes thermisch ist. Dasselbe Resultat erhalten Lohiya und Panchapakesan ⁽¹⁹⁾ durch Lösen der konformal gekoppelten masselosen Klein-Gordon-Gleichung, wobei sie die Wellenfunktionen ausschließlich nach Beobachterfrequenzen zer-

legen. Lapedes ⁽²⁰⁾ zeigte sogar, daß dieses Teilchenspektrum nicht vom Anfangszustand des Feldes abhängt. Rumpf ⁽¹⁶⁾ berechnete die Teilchenerzeugung im de Sitter-Raum mit seiner kovarianten Methode (ich gehe darauf in Kap. 4 genauer ein) der Teilchendefinition. Chitre und Hartle ⁽²¹⁾ behandeln mit Hilfe der Wegintegralquantisierung die Erzeugung von konform gekoppelten Spin-0-Teilchen in einem konform flachen Robertson-Walker-Universum mit dem Expansionsgesetz $R(t) = t$. Sie machten dabei in Anlehnung an die früheren Arbeiten von Hartle und Hawking ⁽²²⁾ sowie Gibbons und Hawking ⁽¹⁸⁾ von der Möglichkeit Gebrauch, das Wegintegral in die komplexe Zeitebene analytisch fortzusetzen. Leider läßt sich diese volle Lösung des Wegintegrals jedoch nur in den allereinfachsten Expansionsgesetzen durchführen. Ein weiteres Modell-Universum, das sogenannte Robinson-Bertotti-Universum wurde mit der gleichen Methode von Lapedes ⁽²³⁾ behandelt. Birrell ⁽²⁴⁾ schlägt ein Impulsraum-Verfahren zur Berechnung der Teilchenerzeugung vor, das aber bisher keine Anwendung gefunden zu haben scheint. Die Gruppe um Dehnen und Audretsch hat ebenfalls Versuche zur Berechnung der Teilchenerzeugung im Universum unternommen. Schäfer und Dehnen ⁽²⁵⁾ betrachteten Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen in einer allgemeinen Robertson-Walker-Geometrie. Da sie ihre Teilchen durch instantane Diagonalisierung des Hamiltonoperators definieren, erhalten sie ein nicht kovariantes Ergebnis. Audretsch und Schäfer ⁽²⁶⁾ lösten die Dirac-Gleichung in einem strahlungsdominierten Robertson-Walker-Universum. Sie erhielten ein quasi-

thermisches Spektrum, das exakt mit dem von mir gefundenen Resultat übereinstimmt. Dieselben Autoren untersuchten außerdem (27,28) ein Robertson-Walker-Modelluniversum ohne Singularität. Auch dieses Ergebnis läßt sich mit der in der vorliegenden Arbeit beschriebenen Methode auf einfache Art erhalten.

Von großem physikalischen Interesse ist auch die Paarproduktion in anisotropen Universen. Zeldovich und Starobinski (29,30) wiesen aufgrund qualitativer Argumente darauf hin, daß Teilchenerzeugung eine Isotropisierung eines ursprünglich anisotropen Universums bewirken könnte. Lukasch und Starobinski (31) behandeln die Teilchenerzeugung in der Nähe der Singularität eines Kasner-Universums mit dem Ergebnis, daß die Erzeugungsrate so groß ist, daß mit einer schnellen Isotropisierung zu rechnen ist.

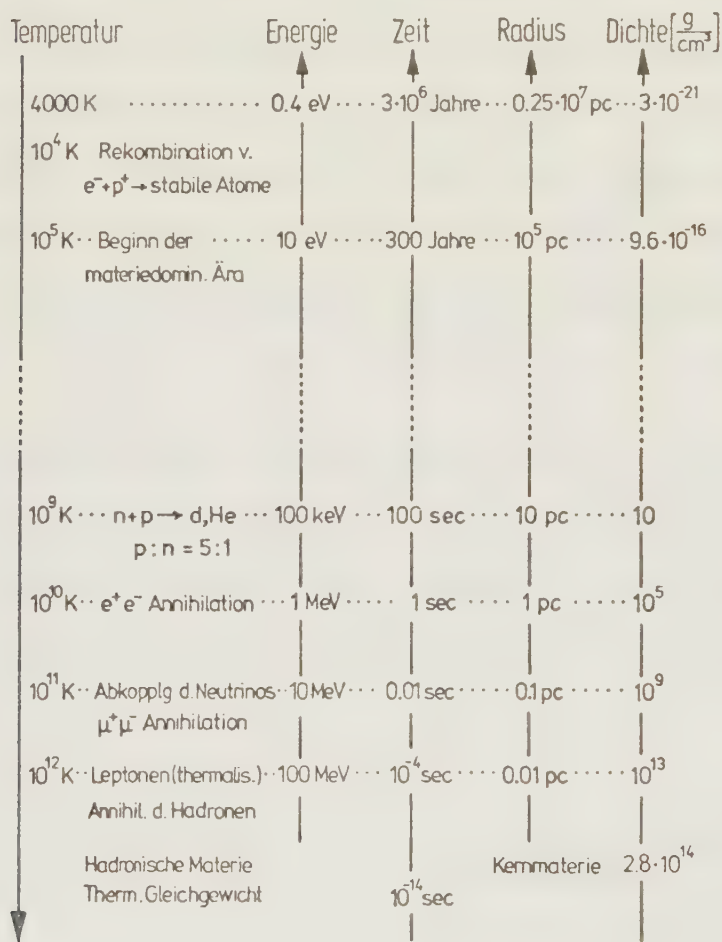
Versuche, die Rückwirkung der erzeugten Teilchen auf die Geometrie des Raumes zu berücksichtigen, sind erheblich seltener. Der erste Versuch dazu wurde von Parker und Fulling (32) unternommen, die ein geschlossenes Robertson-Walker-Universum in Wechselwirkung mit einem minimal gekoppelten Spin-0-Feld betrachten. Um die dabei auftretenden Regularisierungsprobleme, die mit der Berechnung des Energie-Impuls-Tensors verknüpft sind, zu umgehen, haben sie sich auf ausgewählte Moden des Feldes beschränkt. Sie konnten zeigen, daß in diesem Modell die Voraussetzungen der Singularitätentheoreme von Penrose und Hawking (33) verletzt sind, und in der Tat führen in einem

kontrahierenden Universum geeignet präparierte Anfangszustände zu einer Abbremsung der Kontraktion vor Erreichen der Singularität und anschließender Expansion. Nach Ablauf des folgenden Friedmann-Zyklusses kollabiert das Universum dann jedoch zu einer Singularität, da die Kohärenz des Anfangszustandes in der Zwischenzeit zerstört worden ist. Mit ähnlichen Näherungen behandelten Hu und Parker ⁽³⁴⁾ ein anisotropes Bianchi-I-Universum in Wechselwirkung mit einem konform masselosen Skalarfeld. Nach Präparierung eines geeigneten Anfangszustandes zur Planck-Zeit $t_p = 10^{-43}$ sec finden sie, daß die Teilchenerzeugung schnell eine Isotropisierung bewirkt, die zur Zeit $10^3 t_p$ im wesentlichen abgeschlossen ist.

Derartige Betrachtungen setzen natürlich ein beträchtliches Vertrauen in die Extrapolierbarkeit der bekannten physikalischen Gesetze voraus, und es ist durchaus zweifelhaft, ob die erhaltenen Resultate mehr sind als die Eigenschaften eines willkürlichen Modells.

1.2 Vorbemerkungen zur Kosmologie

Nach dem Literaturüberblick möchte ich nun den Versuch machen, die in der vorliegenden Arbeit behandelte Teilchenerzeugung in einen, wenn auch nur grob skizzierten kosmologischen Zusammenhang zu stellen (35,36).



Figur 1 gibt einen Überblick über die Entwicklung des frühen Universums, die hier von unten nach oben zu verfolgen ist.

Betrachten wir im folgenden das Standardmodell beginnend mit dem Urknall bei $t = 0$. Über die Verhältnisse während der ersten 10^{-23} sec erlaubt die Theorie gegenwärtig keine Aussage, weil die Eigenschaften der schwachen und der starken Wechselwirkung bei Temperaturen oberhalb von 100 MeV ebenso unerforscht sind wie die Quanteneigenschaften der Gravitationswechselwirkung, die bei einer genügend kleinen Ausdehnung des Universums eine Rolle gespielt haben müssen. Wir können lediglich vermuten, daß die gesamte Energie nicht thermisch ⁽³⁶⁾ verteilt war, weil die seit dem Urknall vergangene Zeit noch nicht zur Ausbildung eines thermischen Gleichgewichts ausreichte. Der Prozeß der Thermalisierung beruht auf Kollisionen zwischen den Hadronen und ist spätestens nach 10^{-14} sec abgeschlossen ⁽³⁶⁾. Die weitere Entwicklung wird qualitativ durch Abb. (1) beschrieben ⁽³⁵⁾.

Als die Temperatur ungefähr 10^{12} K (100 MeV) betrug, enthielt das Universum im wesentlichen Photonen, Myonen, Antimyonen, Elektronen, Positronen, Neutrinos und einen sehr geringen Anteil von Neutronen und Protonen gleicher Anzahl. Alle diese Teilchen befanden sich im thermischen Gleichgewicht. Sobald die Temperatur unter 10^{12} K absank, begannen sich die μ^+ und μ^- gegenseitig zu vernichten. Nachdem sie praktisch ganz verschwunden waren, bei $T \cong 1.3 \times 10^{11}$ K, koppelten die Neutrinos und Antineutrinos von den übrigen Teilchen ab, und es blieben e^+ , e^- , γ und einige Nukleonen im thermischen Gleichgewicht zurück. Mit dem Absinken der Temperatur unter 10^{11} K (= 10 MeV,

bei $t \approx 0.01 \text{ sec}$) verschob die Massendifferenz zwischen Protonen und Neutronen das Verhältnis beider Nukleonenarten zugunsten der Protonen, da der Zerfall der schwereren Neutronen zu Protonen schneller abläuft als der umgekehrte Prozeß:



Bei der weiteren Abkühlung unter $5 \cdot 10^9 \text{ K}$ ($= 0.5 \text{ MeV}$, bei $t \approx 4 \text{ sec}$) zerstrahlten die Elektron-Positron-Paare, wonach das weiterhin expandierende Universum nun im wesentlichen aus Photonen, Neutrinos und Antineutrinos bestand. Dabei lag die Photonentemperatur um 40 % über der Neutrinotemperatur. Zur selben Zeit erstarrte das Neutron-Proton-Verhältnis bei einem Wert von 1 : 5, bedingt durch die Abkühlung der Neutrinos und das Verschwinden der Elektronen.

Mit etwa 10^9 K (100 keV) war nach etwa 180 sec die Temperatur tief genug, um den Neutronen die Fusion mit Protonen zu schwereren Kernen zu erlauben. Es entstand ein Plasma aus Wasserstoff und etwa 27 Gewichtsprozent ^4He sowie einer geringen Beimischung von Deuterium, ^3He und anderen Elementen. Die freie Expansion der Photonen, Neutrinos und Antineutrinos setzte sich fort mit:

$$T_\gamma = 1.401 T_\nu \sim R^{-1}.$$

Die Temperatur des ionisierten Gases bleibt an die Photonentemperatur gekoppelt, bis die Elektronen und Kerne, also im

wesentlichen der Wasserstoff, bei einer Temperatur von ca. 4.000 K rekombinieren und stabile Atome bilden. Dadurch entkoppelte Strahlung und Materie, und das Universum wurde strahlungsdurchlässig. Bei einer Temperatur zwischen 10^3 K und 10^5 K sank die Energiedichte von Photonen, Neutrinos und Antineutrinos unter die Ruhemassendichte der Nukleonen und es erfolgte der Übergang zur materiedominierten Epoche (36).

Die aus interstellaren Lyman-Absorptionsmessungen sowie aus dem Wasserstoff-Deuterium-Verhältnis im Jupiter gewonnene heutige Baryondichte im Universum liegt zwischen $4 \cdot 10^{-31} \lesssim \lesssim 7 \cdot 10^{-31}$ (g/cm³) mit einer maximalen Unsicherheit von drei Größenordnungen (83).

2. Die Wegintegralmethode und ihre Fortsetzung im Komplexen

Im folgenden wird die in dieser Arbeit verwendete Methode der komplexen Zeit zur Berechnung der Teilchenerzeugung beschrieben. Dazu ist zunächst eine Einführung in die Formulierung der Quantenmechanik durch Wegintegrale notwendig. Erst danach wird es uns möglich sein, diese Verfahrensweise auf komplexe Zeitgebiete auszudehnen.

2.1 Die Definition des Wegintegrals (37)

Bewegt sich ein klassisches Teilchen von einem Punkt x_a zur Zeit t_a zu einem Endpunkt x_b , den es zur Zeit t_b erreicht, dann sagt man, daß das Teilchen von a nach b läuft, und das zugehörige Weg-Zeit-Gesetz $x(t)$ hat die Eigenschaft, daß $x(t_a) = x_a$ und $x(t_b) = x_b$ ist. In der Quantenmechanik hat man entsprechend eine Amplitude (auch Integralkern genannt), die man mit $K(b,a)$ bezeichnet und die den Übergang von a nach b beschreibt. K ist die Summe der Beiträge, die alle möglichen Trajektorien zwischen a und b liefern. Hierin liegt ein Unterschied zur klassischen Mechanik, in der nur eine spezielle Trajektorie von a nach b, die sogenannte klassische Trajektorie $\bar{x}(t)$ realisiert ist, die durch das Prinzip der kleinsten Wirkung (Hamiltonsches Prinzip) festgelegt ist. Die Wirkung S , die für jeden Weg berechnet werden kann, ist gegeben durch:

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(\dot{x}, x, t) dt \quad (2.1)$$

wobei $\mathcal{L}$ die Lagrangefunktion des betreffenden Systems ist.

Das Hamiltonsche Prinzip bedeutet, daß S in erster Ordnung konstant bleibt, wenn der Weg $\bar{x}(t)$ geringfügig verändert wird: $\delta S / \delta x = 0$. Der Verlauf des extremalen Weges wird mit Hilfe der Variationsrechnung bestimmt, und zwar ist das Extremum die Kurve, entlang der die klassische Bewegungsgleichung gilt

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

Streng genommen sind nur die Minima der Wirkung die klassischen Lösungen (d.h. $\delta^2 S > 0$). Für unsere Zwecke wird es aber nur darauf ankommen, einen stationären Zustand und damit einen extremalen Weg zu haben, weshalb die zweite Variation nicht untersucht werden muß. Wir bezeichnen also im folgenden als klassische Lösungen solche mit $\delta S = 0$.

In der Quantenmechanik müssen wir den Beitrag kennen, den jede Trajektorie zur Übergangsamplitude von a nach b liefert. Es trägt nicht nur der eine klassische Weg bei, sondern alle möglichen Wege zwischen a und b liefern einen Beitrag gleicher Größe, aber mit verschiedener Phase. Und zwar ist die Phase eines Beitrages gegeben durch die Wirkung entlang des betreffenden Weges in Einheiten von $\hbar$: $\varphi = \frac{1}{\hbar} S [x(t)]$. Die Wahrscheinlichkeit $P(b,a)$, von einem Punkt x_a zur Zeit t_a zum Punkt x_b zur Zeit t_b zu gelangen, ist also das Absolutquadrat $P(b,a) = |K(b,a)|^2$ der Übergangsamplitude $K(b,a)$ zwischen a und b . Diese Amplitude läßt sich schreiben als Summe der Beträge $\phi [x(t)]$ von jedem Weg:

$$K(b,a) = \sum_{\substack{\text{über alle Wege} \\ \text{von } a \text{ nach } b}} \phi [x(t)] \quad (2.3)$$

wobei der Beitrag eines Weges gegeben ist durch:

$$\phi[x(t)] = \text{const} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (2.4)$$

Das Wirkungsfunktional S ist dabei dasjenige des entsprechenden klassischen Systems. Diese Gleichung ist ebenso axiomatischer Natur wie z.B. die Schrödinger-Gleichung, und, wie man zeigen kann, zu diese äquivalent (bgl. § 2.2). Die Konstante wird so gewählt, daß K normiert werden kann, und die mathematische Bedeutung der "Summe über alle Wege" soll im Folgenden in Analogie zur Riemannschen Integraldefinition erläutert werden.

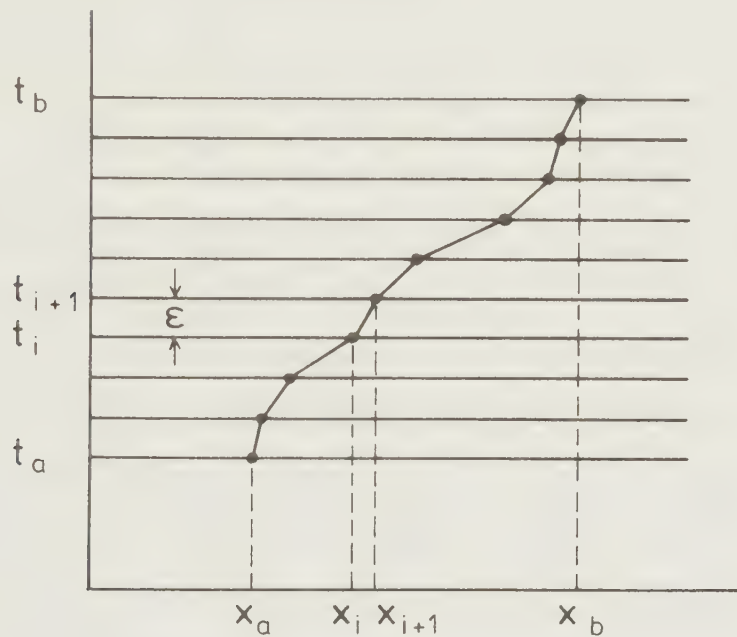
In der Definition des gewöhnlichen Riemannschen Integrals betrachtet man jeweils im Abstand h liegende Ordinaten $f(x_i)$ und approximiert das Integral durch Multiplikation der Summe dieser Ordinaten mit h ,

$$F \approx h \cdot \sum f(x_i) \quad (2.5).$$

Der Wert des (Riemannschen) Integrals ist definiert als der Grenzwert für $h \rightarrow 0$. Dabei ist aber zu bedenken, daß man bei fortgesetzter Wahl kleinerer Abstände h jeweils eine größere Anzahl Summanden in der Summe über die Ordinaten erhalten und ein Grenzwert nicht existieren würde. Erst die Einführung eines zu h proportionalen Normierungsfaktors, der hier natürlich h selbst ist, ermöglicht die Existenz eines Grenzwertes für $h \rightarrow 0$.

Mit Hilfe eines analogen Verfahrens definieren wir das Wegintegral. Die im Grenzübergang verschwindende Größe ist hier das Zeitintervall $\mathcal{E}$ zwischen diskreten Punkten auf dem Weg.

Zunächst wählen wir eine Teilmenge aus der Gesamtheit der möglichen Wege. Dazu wird die unabhängige Zeitvariable t in gleiche Abstände ε zwischen den Endpunkten t_a und t_b zerlegt (vgl. die folgende Abb.).



Zur Bildung der Summe über alle Wege wird zunächst ein beliebig ausgewählter Weg durch seine x -Koordinaten für zahlreiche, im Abstand ε liegende Zeiten t_i festgelegt. Anschließend wird das Integral über diese speziellen Koordinaten im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ ausgeführt.

Man erhält dann die Werte t_i im Abstand ε zwischen t_a und t_b . Zu jeder Zeit t_i wählen wir einen beliebigen Punkt x_i und erhalten dann den Weg durch Verbindung aller Punkte mit Geraden untereinander. Man kann dann die Summe über alle in dieser Weise konstruierten Wege definieren durch Bildung eines Mehrfachintegrals über alle Punkte x_i für i zwischen Eins und $N-1$. Einem Summanden beim Riemannschen Integral entspricht also eine Integration beim Wegintegral. Im Grenzwert

erhält man ein unendlich-faches Integral über alle Positionen $x(t)$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} N\epsilon &= t_b - t_a \\ \epsilon &= t_{i+1} - t_i \\ t_0 &= t_a \quad t_N = t_b \\ x_0 &= x_a \quad x_N = x_b \end{aligned} \quad (2.6)$$

Die der Summe über $f(x_i)$ entsprechende Gleichung lautet dann:

$$K(b,a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \iint \dots \int \phi[x(t)] \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_{N-1}}{A} \quad (2.7)$$

wobei natürlich nicht über die festen Endpunkte x_0 oder x_N integriert wird. Der Grenzwertprozeß wird für $\epsilon \rightarrow 0$ vollzogen, aber es muß, damit der Grenzwert existiert, der Normierungsfaktor A eingeführt werden, der von ϵ abhängt. Den Normierungsfaktor erhält man im Prinzip aus der zusätzlichen Forderung

$$\int dx_2 K(x_3, t_3; x_2, t_2) K(x_2, t_2; x_1, t_1) = K(x_3, t_3; x_1, t_1) \quad (2.8)$$

wobei $t_1 < t_2 < t_3$. Diese Gleichung impliziert die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit während der Ausbreitung, und ist, wie man zeigen kann, äquivalent zur Normierung der Wellenfunktion.

Tatsächlich ist es ein bisher ungelöstes mathematisches Problem ⁽³⁸⁾, den Normierungsfaktor allgemein explizit anzugeben. Im Falle der Langrangefunktion

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x, t) \quad (2.9)$$

ergibt sich

$$A = \left(\frac{2\pi i \hbar \epsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

Für den Fall des freien Teilchens, also $V(x,t) = 0$, werden wir dies im Abschnitt (2.2) explizit nachrechnen.

Der Integrand in Gl. (2.7) ist, wie schon gesagt,

$$\phi[x(t)] = e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]} \quad (2.11)$$

mit
$$S[x(t)] = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(\dot{x}(t), x(t), t) dt. \quad (2.12)$$

S ist also ein Kurvenintegral über den durch die Punkte x_i und die geraden Verbindungen dieser Punkte festgelegten Weg. Eine etwas elegantere Formulierung verwendet für S anstelle eines aus Geradenabschnitten zusammengesetzten Weges Abschnitte des klassischen Weges. Dann ist S der Extremwert des Wirkungsintegrals über alle Wege, die durch die festgelegten Punkte (x_i, t_i) gehen. Mit dieser Definition erübrigt sich die künstliche Einführung gerader Linien.

Ebenso wie beim üblichen Riemann-Integral $\int_a^b f(x)dx$ der Grenzprozess nicht explizit in der Notation zum Ausdruck kommt, schreibt man das Wegintegral (2.7) auch symbolisch in der Form

$$K(b,a) = \int_a^b e^{\frac{i}{\hbar} S[b,a]} \mathcal{D} x(t) \quad (2.13)$$

Im Rahmen der Theorie der Hilbert-Räume kann man solchen "Funktional-Integralen" einen allgemeineren Sinn geben (39).

Sei etwa $F[x]$ ein Funktional auf einem Hilbert-Raum reeller Funktionen $x(t)$. Wir wollen $\int F[x] \mathcal{D} x$ definieren. Ein möglicher Weg ist, die Funktionen $x(t)$ nach einem vollständigen

Orthonormalsystem $\{u_\lambda\}$ zu entwickeln:

$$x(t) = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda} u_{\lambda}(t) \quad (2.14)$$

Man betrachtet dann die Koeffizienten α_{λ} als unabhängige Integrationsvariablen. Nehmen wir zunächst nur endlich viele (n) dieser Koeffizienten mit, so wird aus dem Funktional eine Funktion von n reellen Variablen:

$$F[x] = F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \quad (2.15)$$

Das Funktionalintegral läßt sich dann definieren als Grenzwert eines n-dimensionalen Riemannschen Integrals:

$$\int F[x] dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) d\alpha_1 \dots d\alpha_n \quad (2.16)$$

Die Existenz dieses Grenzwertes läßt sich leicht nachweisen im Falle Gaußscher Integrale, d.h., wenn

$$F(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \exp \left\{ -c \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}^2 \right\} \quad (2.17)$$

ist, im allgemeinen Fall ist jedoch sehr wenig darüber bekannt⁽³⁹⁾. Da diese Überlegungen bei uns nicht von Bedeutung sein werden, verzichte ich auf die Ausführung weiterer Details.

2.2 Das Wegintegral für ein freies Teilchen

Für das Beispiel eines freien Teilchens möchte ich im Folgenden $K(b,a)$ berechnen, also das soeben definierte Wegintegral lösen. Die Lagrangefunktion eines freien Teilchens ist

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (2.18)$$

Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung liefert für die Geschwindigkeit bei der Bewegung von (ξ, τ) nach (ξ', τ')

$$\dot{x} = \frac{\xi' - \xi}{\tau' - \tau} \quad (2.19)$$

also für die Wirkung

$$S(\xi', \tau'; \xi, \tau) = \int_{\tau}^{\tau'} \frac{m}{2} \dot{x}^2 dt \quad (2.20)$$

$$= \frac{m}{2} \frac{(\xi' - \xi)^2}{\tau' - \tau} \quad (2.21)$$

$$= S(\xi' - \xi, \tau' - \tau) \quad (2.22)$$

Dieser Ausdruck wird in das Wegintegral eingesetzt, mit zunächst noch unbestimmtem A:

$$K(b, a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S(b, a)\right) \frac{dx_1}{A} \dots \frac{dx_{n-1}}{A} \quad (2.23)$$

Da wir den Weg in einen Polygonzug zerlegt haben, können wir S auch schreiben ($x_0 = x_a$, $x_n = x_b$):

$$S(b, a) = \sum_{i=1}^N S(x_i - x_{i-1}, \varepsilon) = \sum_{i=1}^N \frac{m}{2} \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{\varepsilon} \quad (2.24)$$

wobei ε der Abstand zwischen zwei benachbarten Zeitpunkten t_i und t_{i-1} ist. Gl. (2.24) eingesetzt in Gl. (2.23) liefert:

$$K(b, a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{im}{2\hbar\varepsilon} \sum_{i=1}^N (x_i - x_{i-1})^2\right) dx_1 \dots dx_{N-1} A^{-N} \quad (2.25)$$

Die $(N-1)$ -fache Gaußsche Integration wird sukzessive ausgeführt. Greifen wir zunächst die Variable x_1 heraus:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{mi}{2\hbar\epsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2] \right\} \frac{dx_1}{A} =$$

$$= \frac{1}{A} \left(\frac{2\pi i\hbar}{m} 2\epsilon \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{mi}{2\hbar(2\epsilon)} (x_2 - x_0)^2 \right\} \quad , \quad (2.26)$$

wobei wir die Formel $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ verwendet haben.

Der bei jeder erneuten Integration erneut erzeugte Vorfaktor tritt im Endresultat N-1mal, also unendlich oft auf und wird durch den Normierungsfaktor A gerade dann kompensiert, wenn wir

$$A = \left(\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.27)$$

wählen, denn der Vorfaktor lautet im Endergebnis

$\left(\frac{2\pi i\hbar\epsilon}{mA^2} \right)^{\frac{N-1}{2}}$. Nur die Wahl von (2.27) ermöglicht ein nicht-divergentes Resultat für (2.25), da der Grenzwert $\lim_{N \rightarrow \infty} x^N$ nur für $x = 1$ existiert.

Das Resultat von Gl. (2.26) wird mit $\exp \left\{ \frac{mi}{2\hbar\epsilon} (x_3 - x_2)^2 \right\}$ multipliziert und erneut integriert, diesmal über x_2 . Es folgt $\left(\frac{2\pi i\hbar}{m} 3\epsilon \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{mi}{2\hbar \cdot 3\epsilon} (x_3 - x_0)^2 \right\}$ als neues Ergebnis. Nach $N - 1$ Schritten ergibt sich:

$$\left(\frac{2\pi i\hbar N\epsilon}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{mi}{2\hbar N\epsilon} (x_N - x_0)^2 \right\} \quad (2.28)$$

Da die Wegunterteilung entsprechend

$$t_b - t_a = t_N - t_0 = N\epsilon \quad (2.29)$$

gewählt war, folgt für die Ausbreitungsamplitude:

$$K(b, a) = \left(\frac{2\pi i\hbar(t_b - t_a)}{m} \right)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar(t_b - t_a)} \right\} \quad (2.30)$$

Dabei ist zu bemerken, daß auch für $\varepsilon \rightarrow 0$ oder durch die Normierung im Nenner auftretende Faktor ε keine Divergenz verursacht, da im Grenzwert immer der Ausdruck $N\varepsilon = t_b - t_a$ mit $N \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ betrachtet wird.

2.3 Äquivalenz der Wegintegralmethode zur "normalen"

Quantenmechanik

Es stellt sich nun die Frage, in welcher Beziehung die durch das Wegintegral gegebene Ausbreitungsamplitude zur Lösung der Schrödingergleichung, also zur üblichen Formulierung der Quantenmechanik steht. Ich werde im Folgenden zeigen, daß die eben berechnete Amplitude $K(b,a)$ eine Elementarlösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung, d.h., gerade die Greensche Funktion ist. Wir gehen aus von der Greenschen Funktion für ein freies Teilchen:

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\right) G(x-x_a, t-t_a) = \hbar\delta(x-x_a)\delta(t-t_a) \quad (2.31)$$

Zur Lösung gehen wir über in die Impulsdarstellung:

$$G(x-x_a, t-t_a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{-i\omega(t-t_a) + ik(x-x_a)} G(k,\omega) \quad (2.32)$$

wobei sich die Differentialoperatoren entsprechend

$$i\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow (+ik)^2 = -k^2 \quad (2.33)$$

transformieren. Die Gleichung für die Greensche Funktion lautet also:

$$\left(\omega - \frac{\hbar k^2}{2m}\right) G(k,\omega) = 1 \quad (2.34)$$

Die retardierte Lösung ist bekanntlich:

$$G(k,\omega) = \frac{1}{\omega - \frac{\hbar k^2}{2m} + i\epsilon} \quad (2.35)$$

wobei implizit der Grenzwert $\epsilon \rightarrow +0$ verstanden wird. Wir transformieren nun zurück in den Ortsraum gemäß Gl. (2.32).

Zunächst liefert die ω -Integration über den Residuensatz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{e^{-i\omega(t-t_a)}}{\omega - \frac{\hbar k^2}{2m} + i\epsilon} = i \exp \left(-i \left(\frac{\hbar k^2}{2m} (t-t_a) \right) \right) \quad (2.36)$$

(für $t > t_a$).

Die anschließende k -Integration ergibt:

$$\begin{aligned} G(x-x_a, t-t_a) &= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp \left\{ ik(x-x_a) - i \frac{\hbar k^2}{2m} (t-t_a) \right\} \\ &= i \exp \left(\frac{im}{2\hbar} \frac{(x-x_a)^2}{t-t_a} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \exp \left\{ - \frac{i\hbar}{2m} (t-t_a) \left(k - \frac{m}{\hbar} \frac{(x-x_a)}{(t-t_a)} \right)^2 \right\} \\ &= \left(\frac{m}{(t-t_a) 2\pi i \hbar} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(\frac{im}{2\hbar} \frac{(x-x_a)^2}{(t-t_a)} \right) \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ein Vergleich mit Gl. (2.30) zeigt, daß

$$K(b,a) = G(x_b - x_a, t_b - t_a) \quad (2.38)$$

ist, was behauptet worden war. Man hätte dies natürlich bis auf einen freien Vorfaktor auch durch Einsetzen in die zeitabhängige Schrödingergleichung und Ausdifferenzieren zeigen können. Sowohl K als auch G haben die physikalische Bedeutung einer Ausbreitungsamplitude für eine Störung von Raumzeitpunkt (x_a, t_a) zum Raumzeitpunkt (x_b, t_b) . Aus ihrer exakten Übereinstimmung können wir schließen, daß der Normierungsfaktor für K den üblichen Konventionen entsprechend gewählt wurde.

Der hier am Beispiel des freien Teilchens durchgeführte Nachweis der Äquivalenz zwischen Ausbreitungsamplitude in der Wegintegralform und der Greenschen Funktion der Schrödingergleichung läßt

sich auch im allgemeineren Fall eines Teilchens in einem äußeren Potential zeigen (84).

Die Beschreibung der Quantenmechanik mit Hilfe der Wegintegralmethode ist also äquivalent zur gewöhnlichen Beschreibung mit dem Propagatorformalismus, erlaubt aber einen direkteren Übergang zwischen klassischer Mechanik und Quantenmechanik, da bei der Berechnung der Übergangsamplitude vom klassischen Zeitintegral der Lagrangefunktion ausgegangen wird (eine Aufstellung der Schrödingergleichung ist nicht notwendig). Bei der Behandlung konkreter Probleme ermöglicht die Wegintegralmethode durchaus nicht für alle quantenmechanischen Systeme eine günstigere Behandlung (z.B. gelang die Lösung des Problems für das Wasserstoffatom erst kürzlich ⁽⁴⁰⁾), erweist sich jedoch immer dort von Vorteil, wo der Übergang Quantenmechanik - klassischer Grenzfall betrachtet werden soll.

2.4 Die WKB-Näherung und Ausdehnung der Wegintegralmethode auf komplexe Zeiten

Die explizite Berechnung des Integrals

$$K(b,a) = \int_a^b \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right) \mathcal{D}x(t) \quad (2.39)$$

ist außerordentlich kompliziert und, ähnlich, wie die Lösung der Schrödingergleichung, nur in einigen ausgesuchten Fällen möglich. Im allgemeinen Fall verwendet man Näherungsmethoden, von denen für die vorliegende Arbeit die sogenannte quasi-klassische Näherung von Bedeutung ist.

Auf den ersten Blick scheinen alle Wege einen gleichen Beitrag zu liefern, nur ihre Phasen unterscheiden sich. Gerade darin liegt aber der wesentliche Unterschied. Die Wirkung ist ein Funktional des Weges $x(t)$, dessen Minimum ($\delta S=0$, $\delta^2 S > 0$) die klassische Wirkung S_{cl} ist.

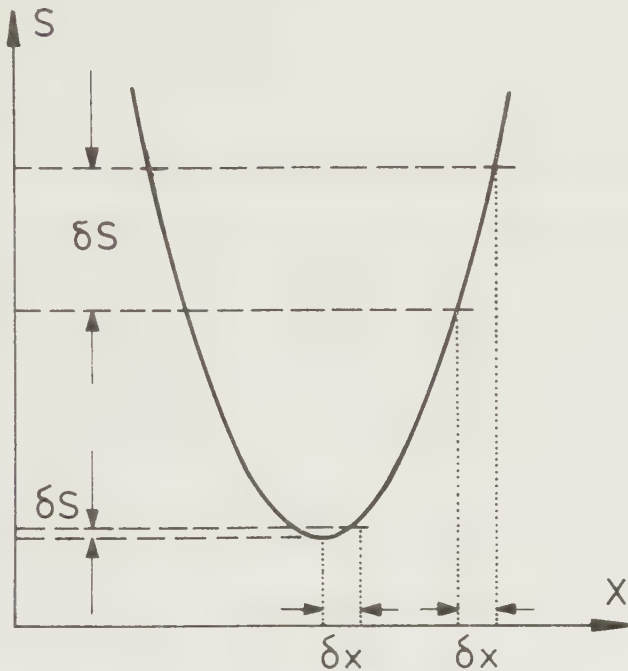


Abb. 2: Die Wirkung S (Ordinate) ist als Funktion des Weges (Abzisse) dargestellt.

Solange S nicht extremal wird, verursacht eine kleine Änderung δx des Wegs eine proportionale Änderung δS der Wirkung. Die Variation δS ist groß in Einheiten von $\hbar$, d.h., die Beiträge benachbarter Wege heben sich durch Interferenz weg. Im Bereich des Minimums verursacht eine kleine Änderung des Weges in erster Ordnung keine Änderung der Wirkung ($\delta S=0$), d.h., die Phase ändert sich nicht und es tritt ausnahmslos konstruktive Inter-

ferenz auf. Berücksichtigt man also bei der Integration lediglich den klassischen Weg, so hat man in vielen Fällen bereits den Hauptbeitrag zu $K(b,a)$ erfaßt.

Diesem Konzept zur Auswertung des Wegintegrals entspricht in der "üblichen" Quantenmechanik die WKB-Näherung.

Es existieren natürlich auch eine ganze Reihe physikalischer Probleme, für die ein derartiger klassischer Weg nicht definiert ist. Ein sehr bekannter derartiger Prozeß ist der Durchgang eines Teilchens durch eine Potentialbarriere, der sogenannte Tunnelprozeß. Klassisch ist dieser Prozeß nicht möglich, stellt man dennoch formal die Bewegungsgleichung auf, so lautet sie:

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 = E - V(x) \quad (2.40)$$

Im Tunnelbereich ist die potentielle Energie $V(x)$ größer als die Gesamtenergie des Systems, d.h., die rechte Seite von Gl. (2.40) ist negativ, während die linke Seite immer positiv bleibt. Es existiert also keine klassische Lösung. Eine Integration dieser "klassischen" Bewegungsgleichung ist unter Hinzunahme komplexer Werte für die Zeit möglich:

$$\frac{dx}{dt} = i \sqrt{\frac{2}{m} (V-E)} \quad (2.41)$$

$$t = -i \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (V-E)}} \quad (2.42)$$

Aus diesem Ergebnis sieht man, daß für einen reellen Ort x die Zeit imaginär (im allgemeinen Fall komplex) wird, d.h., die Weg-Zeit-Funktion verläuft in der komplexen Zeitebene und erfüllt die klassischen Bewegungsgleichungen. Das bedeutet auch, daß man tatsächlich für den klassisch verbotenen Tunnelprozeß einen Weg finden kann, der dem klassischen Hamiltonprinzip genügt. Die Wirkung entlang dieses Weges liefert dann auch den in der quasiklassischen Näherung verwendeten Hauptbeitrag zum Wegintegral. Es stellt sich die Frage, in wie weit es die Theorie gestattet, eine oder mehrere der Koordinaten ins Komplexe fortzusetzen. Dazu erinnern wir uns (2.38), daß die durch das Wegintegral definierte Ausbreitungsamplitude $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ gerade die Greensche Funktion war. Um eine Aussage über die analytische Fortsetzbarkeit zu erhalten, können wir statt dessen auch die sogenannten Wightman-Funktionen

$$\begin{aligned} W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) &= \\ &= \langle 0 | \varphi(x_1, t_1) \dots \varphi(x_n, t_n) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

betrachten, die sich von der Greenschen Funktion nur durch den fehlenden Zeitordnungsoperator unterscheiden. Im Rahmen der axiomatischen Feldtheorie wird gezeigt, daß diese Funktionen analytisch im Bereich der komplexen Koordinatenebene sind, der durch

$$\begin{aligned} -\infty < (\operatorname{Re} x_i, \operatorname{Re} t_i) < +\infty \\ (\operatorname{Im} t_i)^2 - (\operatorname{Im} x_i)^2 > 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Im} t_i < 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

beschrieben wird ⁽⁴²⁾. Anschaulich bedeutet das, daß der Imaginärteil der Koordinaten im vergangenen Lichtkegel liegen muß. Das heißt, daß wir formal statt reeller Koordinaten auch komplexe zulassen dürfen, solange wir in den Beobachtungspunkten an der Realität der Koordinaten festhalten. Insbesondere können wir also den Weg $x(t)$ vorübergehend im Komplexen verlaufen lassen, wenn es auf diese Weise gelingt, einen klassischen Weg zu finden.

Die in diesem Sinne geltende Wegunabhängigkeit des Wegintegrals in der komplexen Zeitebene wurde im nichtrelativistischen Fall von Mc Laughlin ⁽⁴³⁾ ausführlich untersucht; es wurde nachgewiesen, daß der Integralweg in der unteren komplexen Zeitebene gewählt werden muß, wie auch schon aus Gl. (2.44) ersichtlich ist.

Um also eine quasiklassische Näherung zu machen, ersetzen wir zunächst die Vielfalt aller möglichen Wege von a nach b durch den "klassischen" Weg S_{c1} , der den Hauptbeitrag liefert. Die Integration über $\mathcal{P}x(t)$ fällt dann natürlich weg, und wir haben:

$$K(b,a) = W_0^{\frac{1}{2}} e^{iS_{c1}}, S_{c1}[x_{c1}(t)] = S_{c1} \quad (2.45)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der betrachtete Prozeß (z.B. Paarerzeugung) stattfindet, ist dann das Betragsquadrat von K , zu dem nur noch der im Komplexen verlaufende Teil des Weges einen Beitrag liefert:

$$W = |K|^2 = W_0 e^{-2 \operatorname{Im} S_{c1}} \quad (2.46)$$

Durch das Weglassen der Integration über die verschiedenen Wege sind auch die damit verknüpften Normierungsfaktoren (vgl. Gl. 2.7) entfallen und man muß in Gl. (2.46) den Normierungsfaktor W_0 einführen, der sich im Prinzip nur aus der Normierung der Gesamtamplitude bestimmen läßt, etwa aus einer Taylorentwicklung von $S[x(t)]$ in der Umgebung des stationären Punktes x_{c1} ⁽⁴⁴⁾ und Berücksichtigung nur der quadratischen Glieder. Wir setzen also:

$$x(t) = x_{c1}(t) + y(t) \quad , \quad (2.47)$$

wobei $y(t)$ eine kleine Variation des Weges sein soll.

Dann ist:

$$S[x(t)] = S[x_{c1}(t)] + \int_{t_a}^{t_b} dt \left(\frac{\delta^2 S}{\delta x^2} \right)_{x_{c1}} \cdot y^2(t) + \dots \quad (2.48)$$

In dieser Näherung läßt sich das Wegintegral ausführen ⁽³⁹⁾ und man erhält:

$$K(b,a) = W_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{c1}(b,a)}$$

mit
$$W_0 = \left(\frac{\delta^2 S}{\delta x^2} \right)_{x_{c1}}^{-1} \quad (2.49).$$

Im Fall mehrerer Variablen ist $\delta^2 S / \delta x^2$ eine Matrix und man hat die Determinante zu nehmen. Man beachte, daß der klassische Weg immer ein Minimum der Wirkung ist ($\delta^2 S > 0$) und deshalb der Faktor $W_0^{\frac{1}{2}}$ reell ist.

Das so berechnete W_0 ist im allgemeinen von der Größenordnung Eins und hat, da es nicht im Exponenten auftritt, nur sehr geringen Einfluß auf die Übergangswahrscheinlichkeit W (vgl. GL2.45).

In Anbetracht der Größenverhältnisse und Unsicherheiten, die bei den kosmologischen Überlegungen auftreten, spielt W_0 also keine Rolle und wir können auf die Berechnung verzichten.

In besonderen Fällen kann es vorkommen, daß mehrere Wege existieren, die den klassischen Bewegungsgleichungen genügen (z.B. bei nichtlinearen Bewegungs-Gleichungen). Man denke etwa an die Bewegung eines Teilchens auf einer komplizierten Potentialenergiefläche. Dann hat man über alle klassischen Wege zu summieren, also:

$$K(b,a) \approx \sum_{\substack{\text{alle klass.} \\ \text{Wege}}} (W_0)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}(b,a)}, \quad (2.50)$$

als Beispiel dafür wird sich das de-Sitter-Universum erweisen (Kap. 4).

Nun verlassen wir die mathematischen Vorüberlegungen und wenden uns dem eigentlichen Thema der vorliegenden Arbeit zu, der Erzeugung von Teilchen in starken, zeitabhängigen Gravitationsfeldern.

Wenn die Felder ausschließlich eine Funktion der Zeit sind, genügt es, sich auf den explizit zeitabhängigen Anteil der Wirkung zu beschränken:

$$S_{cl} \rightarrow \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial S_{cl}}{\partial t} dt \quad (2.51)$$

Dabei ist $\partial S_{cl} / \partial t$ gerade die klassische Energie des betrachteten Systems. Die Paarproduktion wird also beschrieben

durch:

$$W = W_0 e^{-2 \operatorname{Im} \int \frac{\partial S}{\partial t} dt} \quad (2.52)$$

Wie der Integrationsweg C gewählt werden muß, erläutern wir im Folgenden am Beispiel der Paarerzeugung im homogenen elektrischen Feld.

2.5 Beispiel: Das homogene elektrische Feld (41)

Für unsere Methode ist es zweckmäßig, das Feld in einer Eichung anzugeben, in der das skalare Potential verschwindet: $A_\mu = (0, \vec{A}) = (0, \vec{E} t)$.

Die Energie ist dann gegeben durch:

$$\frac{\partial S_{cl}}{\partial t}^{(+)} = E^{(+)} = \pm \sqrt{m^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2} \quad (2.53)$$

$$S_{cl}^{(+)} = \pm \int \sqrt{m^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2} dt \quad (2.54)$$

Positiven Werten der Wurzel entsprechen Teilchenzustände, negativen Antiteilchenzustände (wir folgen hier der Stückelberg-Feynman-Interpretation, daß Teilchen positive Energie haben, und Antiteilchen negative Energie). S_{cl} als Funktion einer reellen Zeitvariablen aufgetragen liefert also zwei unzusammenhängende Kurven, wobei der obere, positive Ast die Teilchenlösung und der untere die Antiteilchenlösung darstellt. Ein stetiger Übergang zwischen beiden Kurven ist nicht möglich, d.h., entlang der reellen Zeitachse kann klassisch keine Teilchenerzeugung stattfinden. Oder, mit anderen Worten,

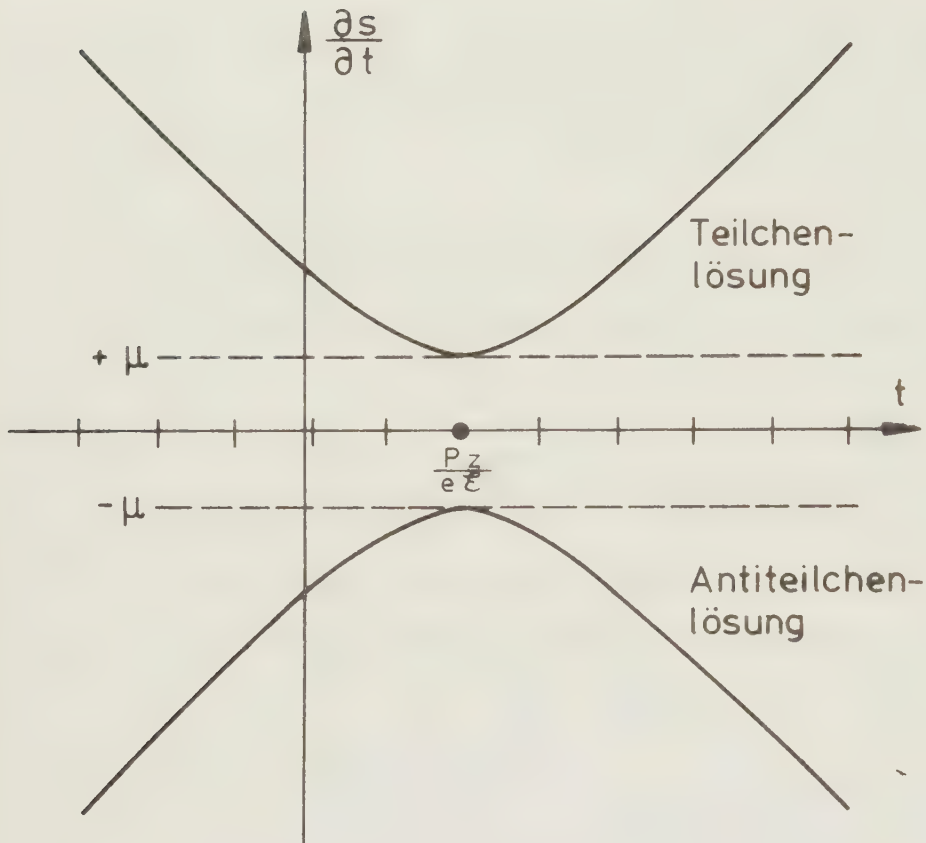


Abb. 3 zeigt für das elektrische Feld die Energie $\frac{\partial S}{\partial t}$ als Funktion einer reellen Zeitvariablen t . Die obere Kurve entspricht der Teilchen-, die untere der Antiteilchenlösung. Der Punkt $\frac{p_z}{e\mathcal{E}}$ bezeichnet den Realteil des Verzweigungspunktes (vgl. Fig. 4).

es existiert kein klassischer Weg, für den Teilchen- und Antiteilchenbahn denselben Energiezustand erreichen. Auch für $t \rightarrow \pm \infty$ bleiben die Lösungen getrennt.

Quantenmechanisch sind dagegen an jeder Stelle Sprünge zwischen den Energiezuständen über den Gap hinweg möglich, da aufgrund

der Unschärferelation kurzfristig die Energie nicht erhalten zu werden braucht. Dies drückt sich in der Wegintegralbeschreibung dadurch aus, daß das Teilchen oder Antiteilchen nicht nur den klassischen oder energetisch erlaubten, sondern jeden beliebigen Weg nehmen kann (Abb. 4).

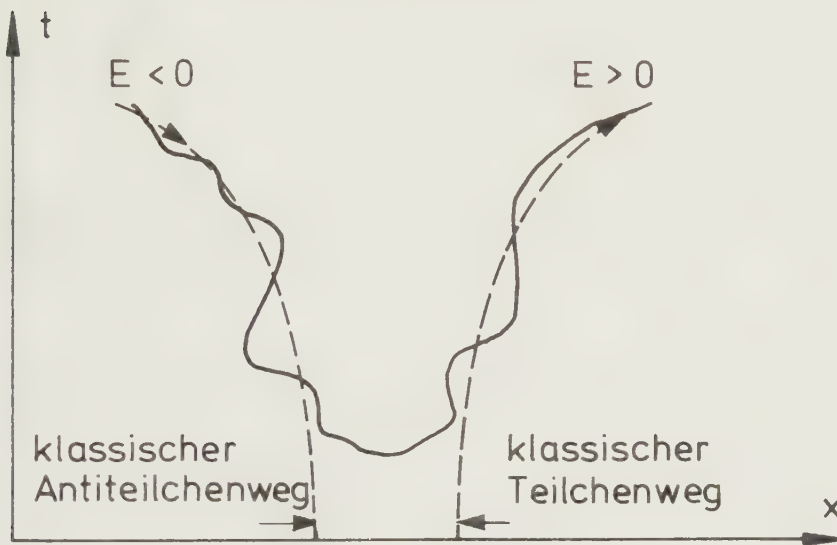


Abb. 4

Dehnt man nun den Wertebereich von t auf alle komplexen Zeiten aus, so werden aus den zwei Energiegraphen der Abb. 3 zwei Riemannsche Energieflächen, deren positive wieder die Teilchenlösung und deren negative die Antiteilchenlösung darstellt (Abb. 5). Die gestrichelte Linie (Graph 3) stellt dabei den komplexen Integrationsweg dar, $-i\frac{\mu}{e\mathcal{E}}$ den Verzweigungspunkt $E = 0$. Am Verzweigungspunkt $E = 0$ der Riemannschen Fläche $F(z) = z^{\frac{1}{2}}$ erreichen Teilchen- und Antiteilchenfläche denselben Energiewert, d.h., Übergänge zwischen $E^{(+)}$ und $E^{(-)}$ sind dort möglich und wir erhalten Paarerzeugung entlang eines klassischen Weges. In einfachen Fällen läßt sich zeigen, daß der Wert des

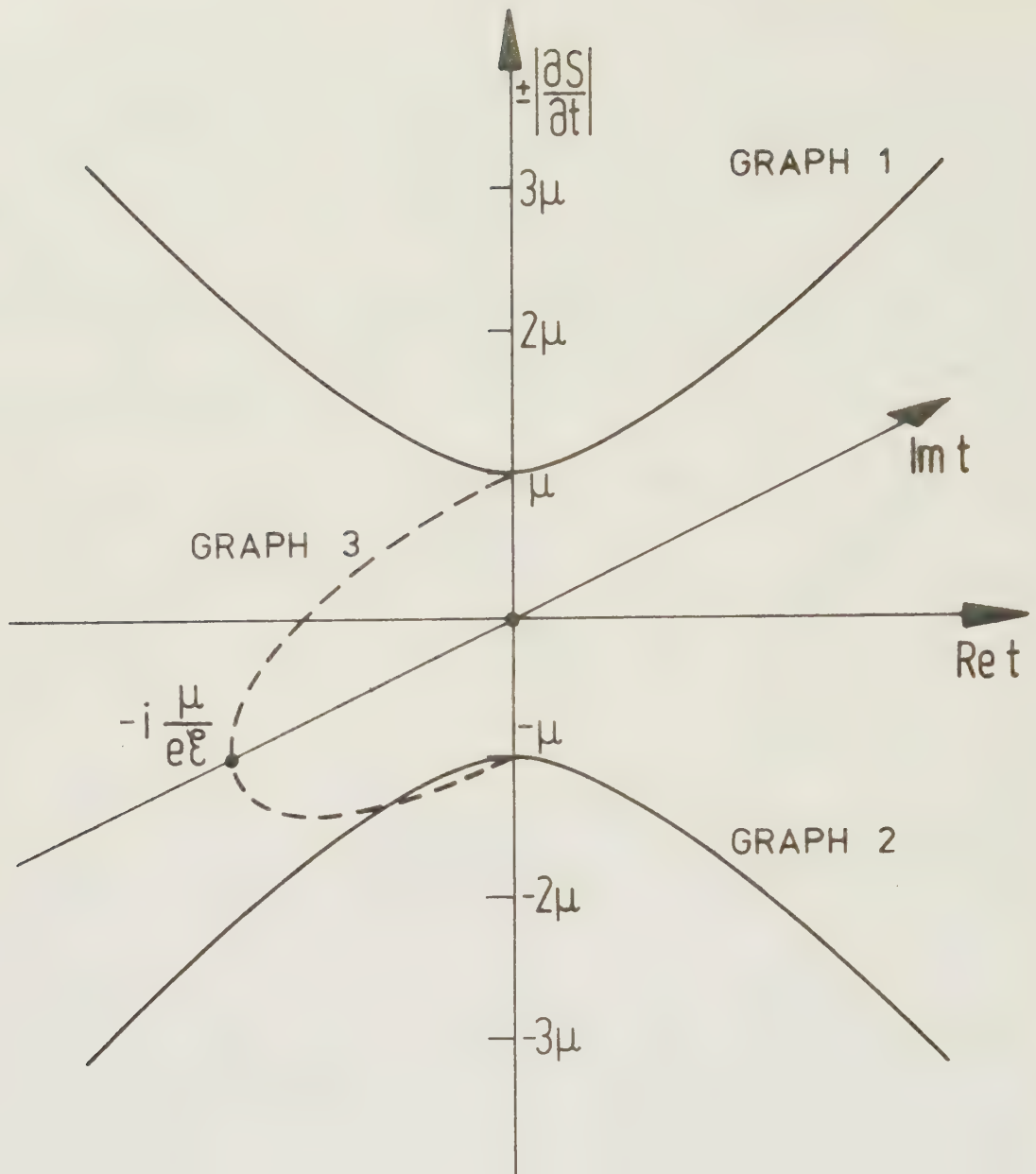


Abb. 5 zeigt den Betrag der Energie $\frac{\partial S}{\partial t}$ über der komplexen Zeitebene. Graph 1 stellt die Teilchenlösung aus Abb. 3 dar, also die Schnittlinie der Energiefläche mit der aus Energie und reeller Zeit gebildeten Ebene, Graph 2 die entsprechende Antiteilchenlösung. Graph 3 stellt einen möglichen Weg von der Teilchen- zur Antiteilchenlösung - durch den Verzweigungspunkt $\frac{-i\mu}{e\xi}$ - dar, der entlang eines Tales der komplexen Energieflächen verläuft.

Integrals (2.52) unabhängig ist vom Verlauf des Weges auf den Energieflächen.

Das Ergebnis ist also durch die Lage des Verzweigungspunktes definiert. Wir erhalten den Verzweigungspunkt aus der Bedingung:

$$E^{(+)}(t) = E^{(-)}(t) \quad \text{und} \quad E^{(-)}(t) = -E^{(+)}(t) \quad (2.55)$$

$$\Rightarrow E^{(+)}(t) = 0 \quad (2.56)$$

also im Falle von Gl. (2.54):

$$m^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2 = m^2 + p_x^2 + p_y^2 + (p_z - e\mathcal{E}t)^2 = 0 \quad (2.57)$$

wobei das $\mathcal{E}$ -Feld in z-Richtung liegen möge. Bei Anwesenheit eines elektrostatischen Potentials V wäre dagegen:

$$E^{(\pm)}(t) = V(t) \pm \sqrt{m^2 + (\vec{p} - e\vec{A})^2} \quad (2.58)$$

Der Verzweigungspunkt wäre dann immer noch durch die Bedingung

$$E^{(+)}(t) = E^{(-)}(t) \quad (2.59)$$

also durch die Stelle, an der die Wurzel verschwindet, gegeben. Dies wäre aber nicht mehr bei $E = 0$, sondern bei $E = V(t)$ der Fall. Kommen wir nun zurück zu Gl. (2.57). Wir können $m^2 + p_x^2 + p_y^2$ zur "transversalen" Masse μ^2 zusammenfassen und erhalten:

$$p_z - e\mathcal{E}t = \pm i\mu$$

$$t_0 = \frac{p_z \pm i\mu}{e\mathcal{E}} \quad (2.60)$$

Gleichung (2.60) liefert zwei symmetrisch zur reellen Zeitachse liegende Verzweigungspunkte. Von physikalischer Bedeutung ist jedoch nur der in der unteren Halbebene liegende, weil nur dort die Funktion $E(t)$ analytisch fortsetzbar ist (vgl. S.28 f.). Wir benennen Real- und Imaginärteil:

$$t_0 = T - i\tau \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{\mu}{e\mathcal{E}}$$

$$T = \frac{p_z}{e\mathcal{E}} \quad (2.61)$$

Da nur der im Komplexen verlaufende Weg einen Beitrag zum Imaginärteil von (2.52) liefert, wird nur die Integration abseits der reellen Zeitachse, um t_0 herum und wieder zur reellen Zeitachse zurück ausgeführt, was dem Doppelten einer Integration von der Achse zum Verzweigungspunkt entspricht.

Wir haben also:

$$\mathcal{F} = \int_T^{T-i\tau} E^{(-)} dt + \int_{T-i\tau}^T E^{(+)} dt = -2 \int_T^{T-i\tau} E^{(+)}(t) dt \quad (2.62)$$

bzw. nach einer Variablentransformation $t = T - is$ mit $0 \leq s \leq \tau$:

$$\mathcal{F} = 2i \int_0^\tau E^{(+)}(T - is) ds \quad (2.63)$$

Die Energie $E^{(+)} = \sqrt{\mu^2 + (p_z - e\mathcal{E}t)^2}$ lautet in den neuen Variablen:

$$E^{(+)}(T - is) = \sqrt{\mu^2 - (e\mathcal{E}s)^2} \quad (2.64)$$

Es bleibt also das Integral zu berechnen:

$$\mathcal{F} = 2i \int_0^\tau \sqrt{\mu^2 - (e\mathcal{E}s)^2} ds \quad (2.65)$$

Mit der Substitution $e \mathcal{E} s = \bar{s}$ und unter Berücksichtigung, daß $e \mathcal{E} \tau = \mu$ war, folgt daraus:

$$\mathcal{J} = \frac{2i}{e \mathcal{E}} \int_0^\mu \sqrt{\mu^2 - \bar{s}^2} \, d\bar{s} = \frac{i \pi \mu^2}{2 e \mathcal{E}} \quad (2.66)$$

Die Teilchenerzeugung wird gegeben durch $W = e^{-2 \text{Im} \mathcal{J}}$ (Gl. 2.52), also

$$W_{e1} = e^{-\frac{\pi \mu^2}{e \mathcal{E}}} \quad (2.67)$$

Tatsächlich ist Gl. (2.67) nur die Erzeugungsrate für einen Satz von Quantenzahlen p_x, p_y, p_z , also eigentlich $\frac{d^3 W}{dp^3}$. Die Integration über alle Zustände und Summation über den Spin liefert die Paarerzeugungswahrscheinlichkeit pro Volumen:

$$\frac{dW_{e1}}{dx^3} = 2 \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_0^{\infty} 2\pi p_\perp \, dp_\perp \left(e^{-\frac{\pi \mu^2}{e \mathcal{E}}} \right) \quad (2.68)$$

Dabei wurde $d^3 p$ bereits in den transversalen Anteil $dp_\perp$ und in den Anteil in Feldrichtung, dp_z , zerlegt. Die Integration über dp_z ist wegen der Beziehung $T = \frac{p_z}{e \mathcal{E}}$ (Gl. 2.61) äquivalent zu einer Integration über alle Zeiten. Betrachtet man die Teilchenerzeugung des konstanten elektrischen Feldes über einen unendlich langen Zeitraum, so werden natürlich unendlich viele Teilchen erzeugt und das Integral muß divergieren, wie man auch in Gl. (2.68) sieht (der Integrand hängt nicht von p_z ab). Um ein endliches Resultat zu erhalten, verzichten wir auf eine Integration über p_z und identifizieren dp_z mit $e \mathcal{E} dt$. Mit diesem Trick erhalten wir

$$\frac{dW_{e1}}{dt \, d^3 x} = \frac{(e \mathcal{E})^2}{4 \pi^3} e^{-\frac{\pi m^2}{e \mathcal{E}}} \quad (2.69).$$

Dieses Resultat ist genau der erste Term in dem bekannten Ausdruck für die Teilchenerzeugung im konstanten elektrischen Feld (46):

$$\frac{dP}{dt d^3x} = \frac{(e\mathcal{E})^2}{4\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n\pi m^2}{e\mathcal{E}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{dP_n}{dt d^3x} \quad (2.70)$$

Die höheren Terme P_n ($n > 1$) sind gegenüber den ersten (P_1) exponentiell klein: $P_n/P_1 = \frac{1}{n^2} \exp(-\frac{\pi m^2}{e\mathcal{E}} (n-1))$. Diese Terme stellen Korrekturen zur semiklassischen Näherung dar, die sich nur in einer exakten quantenmechanischen Behandlung berechnen lassen.

3. Die allgemeine Robertson-Walker-Metrik

Wir werden nun die soeben dargelegte Methode auf die Teilchenerzeugung in kosmologischen Modellen anwenden. Dazu untersuchen wir zunächst als einfachste Klasse von Weltmodellen die homogenen, isotropen Robertson-Walker-Modelle.

Die Metrik lautet:

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left\{ d\chi^2 + \Sigma^2(k) d\Omega^2 \right\} \quad (47)$$

$$\text{mit } \Sigma(-1, 0, +1) = \sinh \chi, \chi, \sin \chi \quad (3.1)$$

d.h.,

$$ds^2 = dt^2 - R(t)^2 \left[\frac{du^2 + u^2 (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2)}{(1 + \frac{k}{4} u^2)^2} \right] \quad (48)$$

Die drei Formen von Σ entsprechen den verschiedenen Geometrien des Universums; $\Sigma = +1$ ergibt ein geschlossenes Universum mit positiver Raumkrümmung, d.h., es ist von Gestalt einer vierdimensionalen Kugel mit den drei Raumwinkeln χ, Θ und φ . Die Parameter $\Sigma = -1$ und $\Sigma = 0$ entsprechen offenen Universen mit negativer bzw. verschwindender Raumkrümmung. Das Differential $d\Omega^2$ steht für das Linienelement auf einer normalen Kugelfläche S^2 , $d\Omega^2 = d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2$.

3.1 Die Wirkungsfunktion

Wir benötigen zunächst die Wirkungsfunktion für ein klassisches Teilchen, das sich frei in der Hintergrundgeometrie, d.h., auf einer Geodätischen, bewegt. Die Gleichung der Geodätischen

$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} = 0$ ist äquivalent zu den Hamiltonschen Gleichungen^(47,49):

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \quad \text{und} \quad \frac{dp_\mu}{d\lambda} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu},$$

wobei $\mathcal{H}$ die sogenannte "Super"-Hamiltonfunktion ist, die sich von einer gewöhnlichen Hamiltonfunktion durch Hinzunahme der Ruheenergie unterscheidet. Bezüglich des Nachweises dieser Äquivalenz sei auf den Anhang (A1) verwiesen.

Um nun das Wegintegral aufstellen zu können, wird zunächst aus der Hamilton-Jakobi-Gleichung die Wirkung als Funktion der Zeit bestimmt, wobei in der Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(x^\alpha, p^\alpha) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta$ die verallgemeinerten Impulse durch den Gradienten $\frac{\partial S}{\partial x^\alpha}$ der Wirkungskfunktion $S(\lambda, x^\alpha)$ ersetzt werden.

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= \mathcal{H}(x^\alpha, \frac{\partial S}{\partial x^\alpha}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Dabei ist λ ein affiner Parameter, der bei massiven Teilchen der Bogenlänge proportional ist^(vgl.48).

Die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung gibt uns die Möglichkeit, die Wirkungskfunktion zu bestimmen⁽⁵⁰⁾. Mit der Metrik (3.1) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} &= \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{1}{R^2 \Sigma^2(k)} \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{R^2 \Sigma^2(k) \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Dabei ist, wie oben erwähnt, $\partial S / \partial x^\alpha$ der verallgemeinerte Impuls in Koordinaten-Richtung α . Da die Wirkungsfunktion in den Beiträgen unabhängiger Freiheitsgrade additiv ist⁽⁵¹⁾, machen wir dementsprechend einen additiven Separationsansatz:

$$S(\lambda, x^\alpha) = S_\lambda(\lambda) + S_t(t) + S_x(\chi) + S_\nu(\nu) + S_\varphi(\varphi) \quad (3.4)$$

wobei $S_i(x^i)$ jeweils nur von der Koordinate x^i abhängen soll, also:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S_t(t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial S}{\partial \nu} = \frac{\partial S_\nu(\nu)}{\partial \nu} \quad \text{etc.} \quad (3.5)$$

Erinnert man sich an den Ausdruck für die Propagationsamplitude $K(x_b, t_b, x_a, t_a) = \sum e^{iS[x(t)]}$, so erkennt man, daß der Ansatz (3.4) einer Faktorisierung des Propagators und damit der Wellenfunktion gleichkommt. Die additive Separation für $S(x^\alpha)$ entspricht also dem üblichen Separationsansatz in der Wellengleichung.

Die Separationsergebnisse lauten (die Durchführung der Separation ist in Anhang (A2) beschrieben):

$$\frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \mu^2 \quad (3.6)$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} = \xi \quad (3.7)$$

$$p_\nu^2 = \left(\frac{\partial S_\nu}{\partial \nu} \right)^2 = \eta^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \nu} \quad (3.8)$$

$$p_\chi^2 = \left(\frac{\partial S_\chi}{\partial \chi} \right)^2 = \gamma^2 - \frac{\eta^2}{\Sigma^2(k)} \quad (3.9)$$

$$p_t^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \mu^2 + \frac{\gamma^2}{R^2} = \mu^2 + \frac{1}{R^2} \left[p_\chi^2 + \frac{1}{\Sigma^2} \left(p_\eta^2 + \frac{p_\xi^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] \quad (3.10)$$

$$\text{bzw. } \frac{\partial S(t)}{\partial t} = E^{(\pm)}(t) = \pm \sqrt{\mu^2 + \frac{\gamma^2}{R^2(t)}} \quad (3.11)$$

Die Größen μ, ξ, η, γ sind dabei Bewegungskonstanten, deren physikalische Bedeutung aus den Gleichungen offensichtlich wird: μ ist die Ruhemasse, γ/R der Gesamtimpuls des Teilchens, η der übliche Drehimpuls mit der Azimutalkomponente ξ . Die Trajektorie eines Teilchens ist also durch die Erhaltungsgrößen (Quantenzahlen) γ, η, ξ bestimmt.

3.2 Die Erzeugungsrate

Nach diesen Vorüberlegungen können wir die Teilchenerzeugungswahrscheinlichkeit pro Freiheitsgrad mit Hilfe von Gl. (3.11) und Gl. (2.52) schreiben als

$$W(\gamma) = e^{-2} \operatorname{Im} \int_c \sqrt{\mu^2 + \frac{\gamma^2}{R(t)^2}} dt \quad (3.12)$$

wobei das Integral auf einem Weg um den Verzweigungspunkt (der im Einzelfall zu bestimmen ist) herum geführt werden muß.

Auch in diesem Fall, wie schon im elektrischen Feld, wird wieder der Verzweigungspunkt durch die Bedingung $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, also:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sqrt{\mu^2 + \frac{\gamma^2}{R(t)^2}} = 0 \quad (3.13)$$

bestimmt, da die Gravitationskraft ladungskonjugations-symmetrisch ist. Der den beiden Energieflächen gemeinsame Verzweigungspunkt liegt bei (s. Abb. 6),

$$R = - \frac{i\gamma}{\mu}$$

(3.14)

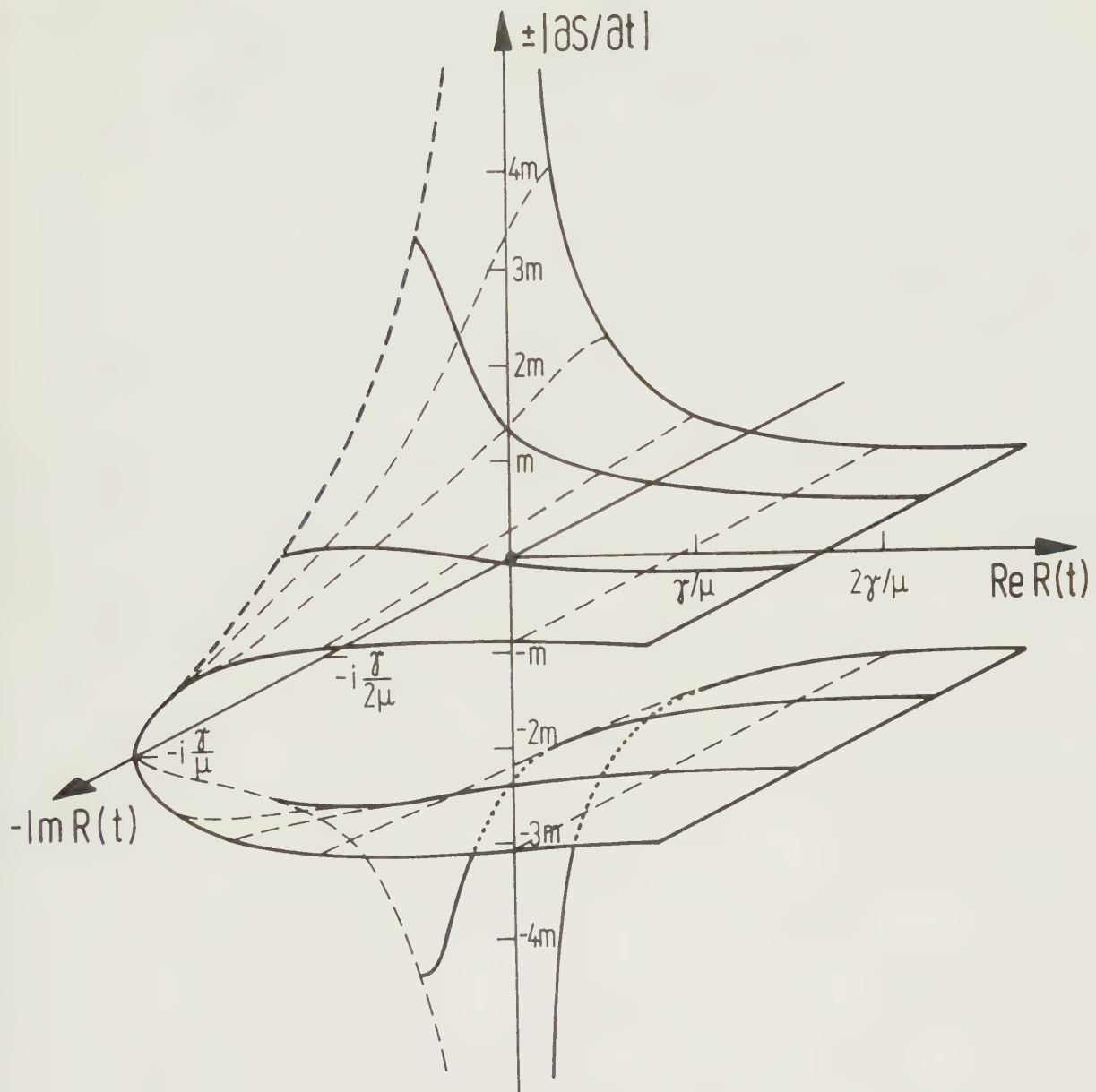


Abb. 6 Der Betrag der Energie $\pm \left| \frac{\partial S}{\partial t} \right|$ ist über der komplexen Zeitebene aufgetragen. Der Punkt $(-i \frac{\gamma}{\mu})$ auf der komplexen Achse bezeichnet den Verzweigungspunkt.

Verwendet man für das Expansionsgesetz $R(t)$ kompliziertere Funktionen, so ergeben sich natürlich auch für die Lage des

Verzweigungspunktes (oder der Verzweigungspunkte) in der t-Ebene entsprechende Veränderungen (vgl. Kap. 4).

Aus der Erzeugungswahrscheinlichkeit $W(\chi)$, die zunächst nur für einen bestimmten Impulsparameter χ berechnet wurde, erhält man die Gesamtzahl der erzeugten Teilchen durch Integration über die Zustandsdichte im Impulsraum. Die Dichte der Zustände im Impulsraum läßt sich nur über die Quantenmechanik bestimmen. Löst man die Wellengleichung für ein Spin-0 ⁽¹³⁾ oder ein Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen ⁽²⁵⁾, so stellt man fest, daß η und ξ und im Falle eines geschlossenen Universums auch χ gequantelt sind; und zwar ganz- oder halbzahlilig, je nach Spin des Teilchens. Dies ist eine Folge der Periodizität der Wellenfunktion in den Winkel θ und φ und im Falle des geschlossenen Universums auch im Winkel χ :

$$|\psi(\varphi + 2\pi)|^2 = |\psi(\varphi)|^2 \quad (3.15)$$

$$|\psi(\theta + \pi)|^2 = |\psi(\theta)|^2 \quad (3.16)$$

$$|\psi(\chi + \pi)|^2 = |\psi(\chi)|^2 \quad (3.17)$$

Da wegen der Größe von R die Quantelung extrem fein ist, lassen sich die Summen über die Zustände im Phasenraum für alle praktischen Zwecke durch Integrationen ersetzen. Wie im üblichen Thomas-Fermi-Modell erhält man dann:

$$\sum_{\chi} \sum_{\eta} \sum_{\xi} \rightarrow \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^{\infty} \chi^2 d\chi \quad (3.18)$$

Streng genommen läuft dabei die χ -Integration nicht von Null,

sondern von $(S + 1)$, wobei S der Spin der betrachteten Teilchenart ist. Ersetzt man χ durch den physikalischen Impuls $p = \chi/R$, so erhält man $\frac{R^3}{(2\pi)^3} \int d^3p$ für den Ausdruck (3.18), d.h., das "normale" Integral über die Zustandsdichte im Impulsraum. Damit ergibt sich:

$$N = \int d^3x \int \frac{4\pi \chi^2 d\chi}{(2\pi)^3} 2 W(\chi) \quad (3.19)$$

Das Integral über d^3x kann man natürlich nur in geschlossenen Universen ausführen, dort ist es gleich $2\pi^2$.

Eine weitere allgemeine Diskussion der Klasse der Robertson-Walker-Universen ist an dieser Stelle nicht möglich, wir müssen uns jetzt für ein spezielles Modell für $R(t)$ entscheiden, das wir dann in Gl. (3.12) einsetzen können.

4. Teilchenerzeugung im de Sitter-Universum

Das de Sitter-Universum ist eines der sehr wenigen analytisch behandelbaren und deswegen auch ausführlich untersuchten Modelluniversen. Mit seiner zeitunabhängigen Hubble-"Konstanten" stellt es außerdem die exakte Analogie zum konstanten elektrischen Feld dar.

Das de Sitter-Universum ist Lösung der Einsteinschen Gravitationsgleichungen mit kosmologischer Konstante Λ im leeren Raum.

Am Beispiel des de Sitter-Universums soll also im Folgenden die Teilchenerzeugung mit der Methode der komplexen Wegintegrale ausführlich durchgeführt werden. Ein anschließender Vergleich des so erhaltenen Resultats mit den exakten Lösungen⁽⁵²⁾ wird uns außerdem ermöglichen, eine Aussage über die mit der quasiklassischen Näherung erreichbaren Genauigkeit zu machen.

4.1 Der de Sitter-Raum

Die Metrik lautet⁽⁵³⁾:

$$ds^2 = dt^2 - a_0^2 e^{2t/\tau} d\Omega_3^2 \quad (4.1)$$

$$\text{mit: } \tau = \left(\frac{3}{\Lambda}\right), \quad k = 0 \quad (4.2)$$

Dabei bedeutet $d\Omega_3^2$ das Linienelement auf einer vierdimensionalen Kugeloberfläche: $d\Omega_3^2 = d\chi^2 + \chi^2 d\Theta^2 + \chi^2 \sin^2 \Theta d\varphi^2$, und Λ ist die Hubble-Konstante:

$$\Lambda = \frac{1}{(1.3 \times 10^{10})^2} \text{ (Lichtjahre)}^{-2} \quad (4.3)$$

$$\tau \approx 10^{10} \text{ Jahre}$$

Das de Sitter-Universum ist ein expandierender, isotroper Raum ohne Singularität. Das bedeutet, daß $R(t)$ weder Null noch Unendlich wird für endliche Zeiten, was allerdings drastische Konsequenzen für Energiedichte und Druck hat:

$$\rho = p = 0 \quad (4.4)$$

Die Expansionsgeschwindigkeit dieses Universums wird beschrieben durch:

$$\frac{\dot{R}}{R} = \frac{1}{\tau}$$

also: $R(t) = a_0 e^{t/\tau}$ mit $a_0 = \text{const.}$ (4.5)

Uns liegt hier also das Modell eines Universums ohne Anfang und Ende vor, mit einem sich ständig ausdehnenden, aber vollkommen leerem Raum. Ein derartiges Modell kann man natürlich nicht als realistisch bezeichnen; dennoch geht jedes Modell mit $\Lambda > 0$ für $R \rightarrow \infty$ in den Grenzfall de Sitter über⁽⁵⁴⁾.

Aufgrund ihrer interessanten gruppentheoretischen Eigenschaften (besonders der Invarianz unter den Transformatoren der de Sitter-Gruppe $SO(4,1)$ ⁽⁵⁵⁾) ist das de-Sitter-Universum außerordentlich gut mathematisch untersucht worden. Die aus dem de Sitter-Modell folgenden physikalischen Implikationen wurden unter anderem von Robertson und Noonan⁽⁵⁶⁾ ausführlich beschrieben.

4.2 Die Erzeugungsrate

Betrachten wir noch einmal die Metrik (4.1) und vergleichen sie mit der Robertson-Walker-Metrik, Gleichung (3.1), so können wir sofort das spezielle Expansionsgesetz $R(t)$ im de Sitter-Fall angeben:

$$R(t) = a_0 e^{t/\tau} \quad (4.6)$$

de Sitter ist also ein Spezialfall der Robertson-Walker-Metrik mit $k = 0$. Wir können deshalb die allgemein formulierte Gleichung für die Energie (3.11) verwenden und erhalten:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sqrt{\mu^2 + \frac{\gamma^2}{a_0^2 e^{2t/\tau}}} \quad (4.7)$$

Die Gleichung für die Erzeugungsrate lautete (2.52):

$$W = e^{-2} \operatorname{Im} \int \frac{\partial S}{\partial t} dt \quad (4.8)$$

und wir erhalten:

$$W = \exp \left\{ -2 \operatorname{Im} \int_0^t \frac{e^{-t/\tau}}{a_0} \sqrt{a_0^2 e^{2t/\tau} \mu^2 + \gamma^2} dt \right\} \quad (4.9)$$

Die dt -Integration soll im Folgenden analog zu der im elektrischen Feld-Beispiel verwendeten Methode durchgeführt werden.

Die Bestimmung des Verzweigungspunktes ist wieder äquivalent mit der Forderung, daß der Radikand gleich Null sein soll:

$$\begin{aligned} \mu^2 a_0^2 e^{2t/\tau} + \gamma^2 &= 0 \\ t/\tau &= \ln \frac{\gamma}{\mu a_0} + \ln(i) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Das Argument des Logarithmus läßt sich schreiben als

$$\pm i = e^{\pm i \frac{\pi}{2}} + 2n\pi i \quad (4.11)$$

und, wenn wir wieder beachten, daß die Funktionen in die untere Halbebene analytisch fortgesetzt werden müssen, erhalten wir die Verzweigungspunkte:

$$t_n = \tau \ln\left(\frac{\gamma}{\mu a_0}\right) - i\pi\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (4.12)$$

Wegen der Vieldeutigkeit des Logarithmus liegt hier also nicht nur ein Verzweigungspunkt vor, sondern abzählbar unendlich viele ($0 \leq n < \infty$). Die Anordnung dieser Verzweigungspunkte ist in folgender Abbildung (7) dargestellt.

Alle t_i haben denselben Realteil, nämlich $t_R = \tau \ln\left(\frac{\gamma}{\mu a_0}\right)$ und liegen - wegen der zwei Ausgangspunkte $e^{\pm i \frac{\pi}{2}}$ - in einem Abstand von $i\pi\tau$ untereinander. Die Funktion $\partial S / \partial t$ hat wegen der Periodizität der Exponentialfunktion unendlich viele Riemannsche Blätter, deren Verzweigungspunkte wir soeben ausgerechnet haben. Diese Blätter durchdringen sich entlang der ebenfalls eingezeichneten Schnittlinien, die jeweils die Punkte $\tau \ln(\gamma / \mu a_0) \pm \frac{i\pi\tau}{2} + 2n i\pi\tau$ miteinander verbinden. Der genaue Verlauf dieser Schnitte ist, wie immer, für die praktische Rechnung unwichtig, wir haben eine willkürliche Wahl im Bild getroffen.

Die Integration verläuft also von $t_R = \tau \ln(\gamma / \mu a_0)$ nach

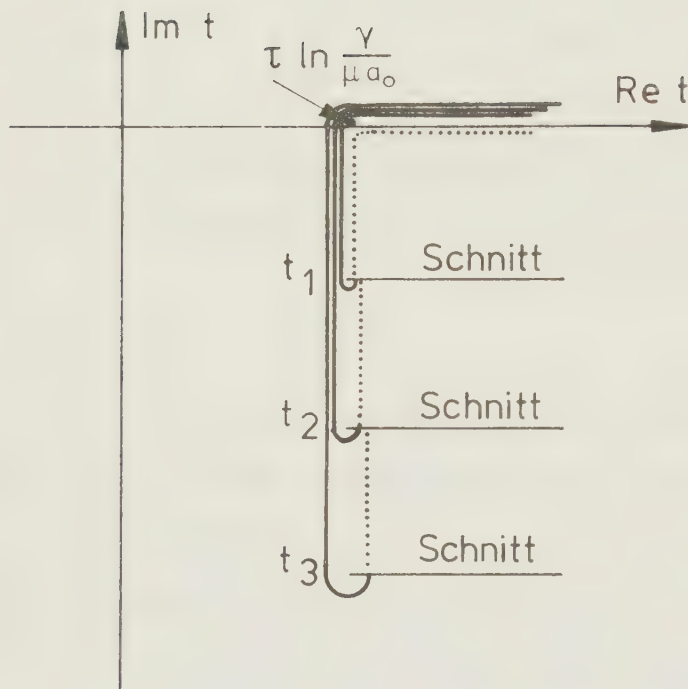


Abb. 7 zeigt die komplexe Zeitebene (Abzisse Realteil, Ordinate Imaginärteil der Zeit) und die untereinander in Abstand $\tau \ln$ liegenden Verzweigungspunkte. Die Integrationswege um diese Verzweigungspunkte sind ebenfalls eingezeichnet, und zwar punktiert auf der Antiteilchenebene und durchgezogen auf der Teilchenebene

$\tau \ln (\gamma / \mu a_0) - i \tau \pi (n + \frac{1}{2})$ und dann wieder nach t_R zurück. Diese beiden Wegabschnitte sind gleich; man kann die Integrationsgrenzen deshalb auch umkehren und erhält dann:

$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{e^{-t/\tau}}{a_0} (\pm 1) \sqrt{a_0^2 e^{2t/\tau} \mu^2 + \gamma^2} dt =$$

$$= \int_0^{\tau \ln(\frac{\gamma}{\mu a_0}) - i \tau \pi (n + \frac{1}{2})} \frac{e^{-t/\tau}}{a_0} (-1) \sqrt{a_0^2 e^{2t/\tau} \mu^2 + \gamma^2} dt + \dots$$

$$\begin{aligned}
 & \dots + \int_0^{\tau \ln(\frac{\gamma}{\mu a_0}) - i\pi\tau(n+\frac{1}{2})} \frac{e^{-t/\tau}}{a_0} (+1) \sqrt{a_0^2 e^{2t/\tau} \mu^2 + \gamma^2} dt = \\
 & \tau \ln(\frac{\gamma}{\mu a_0}) - i\pi\tau(n+\frac{1}{2}) \\
 & = -2 \int_0^{\tau \ln(\frac{\gamma}{\mu a_0}) - i\pi\tau(n+\frac{1}{2})} \frac{e^{-t/\tau}}{a_0} (+1) \sqrt{a_0^2 e^{2t/\tau} \mu^2 + \gamma^2} dt \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Substitution $t = \tau \ln(\frac{\gamma}{\mu a_0}) - i\pi\tau(n+\frac{1}{2})$ - is vereinfachen wir das Integral

$$\begin{aligned}
 W &= \exp \left\{ -4 \operatorname{Im} \left(\mu \int_0^{\tau \ln(\frac{\gamma}{\mu a_0}) - i\pi\tau(n+\frac{1}{2})} \sqrt{1 + e^{2is/\tau}} ds \right) \right\} \\
 &= \exp \left\{ -4\mu \operatorname{Re} \int_0^{\pi\tau(n+\frac{1}{2})} \sqrt{1 + e^{2is/\tau}} ds \right\} \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Nach dieser Substitution läßt sich der Verlauf des Integrationsweges leichter untersuchen. Dazu betrachten wir den Integranden $f(s) = \sqrt{1 + e^{2is/\tau}}$ in graphischer Darstellung wie untenstehend gezeichnet (Abb. 8).

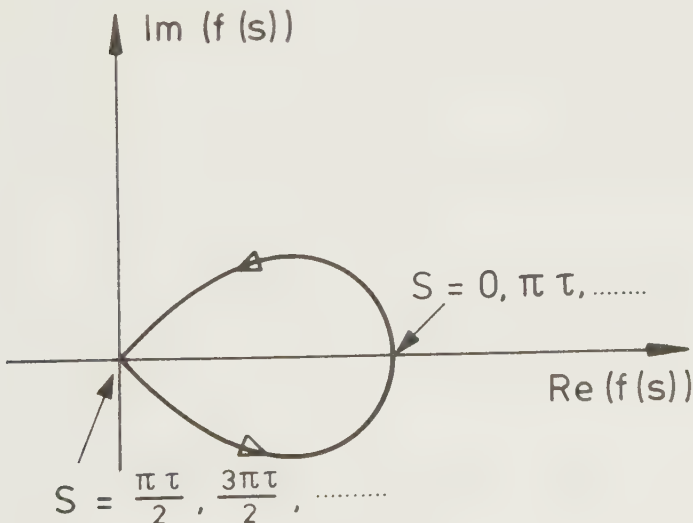


Abb. 8 zeigt den Verlauf des Integranden von Gl. (4.14) in der komplexen Ebene.

Einer Integration $\operatorname{Re} \int_0^{\pi\tau(n+\frac{1}{2})} ds f(s)$ ist also die $(n + \frac{1}{2})$ fache Integration über den Teilbereich von $0 \rightarrow \frac{1}{2}\pi\tau$ äquivalent,

denn dieser Bereich wiederholt sich $(2n + 1)$ mal. Oder, mit anderen Worten, das allgemeine Integral entspricht im Realteil genau $(n + \frac{1}{2})$ Umläufen.

Der Ausdruck für die Erzeugungswahrscheinlichkeit lautet also:

$$W = \exp \left\{ - 4 \mu \left(n + \frac{1}{2} \right) \operatorname{Re} \int_0^{\pi \tau} \sqrt{1 + e^{2is/\tau}} ds \right\} \quad (4.15)$$

Mit der Substitution $x = e^{2is/\tau}$ bleibt dann nur noch eine Integration entlang des Einheitskreises übrig:

$$W = \exp \left\{ - \mu \tau (2n + 1) \oint_{K_1} \sqrt{1 + x} \frac{dx}{x} \right\} \quad (4.16)$$

Dieses Integral lösen wir leicht mit dem Residuensatz:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \oint_{K_1} \sqrt{1 + x} \frac{dx}{x} = 2 \pi i \operatorname{Res}_{x=0} \left(\frac{\sqrt{1+x}}{x} \right) \\ &= 2 \pi i \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{1 + x} = 2 \pi i \end{aligned} \quad (4.17)$$

In Gl. (4.16) eingesetzt ergibt sich:

$$W_n = \exp \left\{ - 2 \pi \mu \tau (2n + 1) \right\} \quad (4.18)$$

Da n alle Werte zwischen Null und ∞ durchläuft, muß das Resultat natürlich in Form einer Summe dargestellt werden:

$$W = \sum W_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2\pi\mu\tau(2n+1)} \quad (4.19)$$

Mit der Summenformel für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

erhalten wir schließlich:

$$W = \frac{e^{-2\pi\mu\tau}}{1 - e^{-4\pi\mu\tau}} = \frac{1}{2 \sinh(2\pi\mu\tau)} \quad (4.20)$$

Bei dieser letzten Umformung des Resultats ist allerdings einschränkend zu bemerken, daß wir die Erzeugungswahrscheinlichkeit nur aufgrund einer (WKB)-Näherung gewonnen haben.

Die Abweichung des Ausdrucks $(1 - e^{-4\pi\mu\tau})$ von 1 kann also leicht geringer sein als die durch die Näherung erreichbare Genauigkeit.

Wenn wir also $e^{-4\pi\mu\tau}$ vernachlässigen, was identisch ist mit einer Vernachlässigung aller Verzweigungspunkte höherer Ordnung (also $n \geq 1$), so erhalten wir:

$$W \approx W_0 e^{-2\pi\mu\tau} \quad (4.21).$$

4.3 Vergleich mit der exakten Lösung

H. Rumpf ⁽⁵²⁾ hat das Problem der Teilchenerzeugung im de Sitter-Universum für Bosonen ohne Näherungen gelöst, und zwar durch Lösung der Klein-Gordon-Gleichung. Wie wir anfangs am Beispiel der Schrödingergleichung für das freie Teilchen sahen, entspricht dies genau einer Integration über alle Wege. Die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + \mu^2 - \frac{1}{6} R) \psi = 0 \quad (4.22)$$

führt in der de Sitter-Metrik auf die Lösungen

$$\psi_{jlm} = \frac{\cos \mathcal{J}}{\tau} f_j(\mathcal{J}) Y_{jlm}(\chi, \theta, \varphi) \quad (4.23)$$

wobei die Zeitkoordinate $\mathcal{J}$ mit der Koordinate t der Metrik (4.1) über

$$\frac{e}{\cos \vartheta} d\vartheta = dt \quad (4.24)$$

zusammenhängt und die Y_{jlm} die Kugelfunktionen auf der vierdimensionalen Einheitskugel sind. Der zeitabhängige Anteil ist dabei:

$$f_j(\vartheta) = \frac{e^{-i(j+1)\vartheta}}{(j+1)!} \sqrt{\frac{1}{2} \Gamma(j + \frac{3}{2} - i\varrho) \Gamma(j + \frac{3}{2} + i\varrho) \cdot \dots} \\ \dots \cdot {}_2F_1(\frac{1}{2} - i\varrho, \frac{1}{2} + i\varrho, j + 2; \frac{1 - i \tan \vartheta}{2})$$

$$\text{mit } \varrho = \sqrt{\mu^2 \tau^2 - \frac{1}{4}}. \quad (4.25)$$

Aus den Funktionen ψ_{jlm} und ψ_{jlm}^* bildet Rumpf ein- und auslaufende Wellenfunktionen für Teilchen und Antiteilchen $^{\pm} \psi$ und $_{\pm} \psi$. Er kann dann die auslaufenden Zustände durch die einlaufenden darstellen:

$$^+ \psi_{jlm} = \alpha_j \psi_{jlm} + \beta_j \psi_{jlm} \quad (4.26)$$

Die Mischungskoeffizienten β_j geben die Amplitude für die Erzeugung eines Paares im Kanal (jlm) an. Rumpf findet:

$$W_{\text{Rumpf}} = \beta_j^2 = \frac{1}{\sinh^2(\pi \varrho)} \sim \frac{1}{\sinh^2(\pi \mu \tau)} \quad (4.27)$$

Entwickelt man diesen Ausdruck, so folgt

$$W_{\text{Rumpf}} \approx 4 e^{-2\mu\pi\tau} (1 + 2e^{-2\mu\pi\tau} + \dots) \quad (4.28)$$

Demgegenüber liefert eine Entwicklung von Gl. (4.20) unter Einfügung eines unbestimmten Normierungsfaktors W_0 :

$$W = \frac{W_0}{2 \sinh(2\mu\pi\tau)} = W_0 e^{-2\pi\tau\mu} (1 + e^{-4\pi\tau\mu} + \dots) \quad (4.29)$$

Die Berechnung der Teilchenerzeugung mit Hilfe der Wegintegralmethode in komplexen Zeiten stimmt also in erster Ordnung mit dem exakten Resultat überein. In Anbetracht der kosmologischen Größenordnungen (mit einer typischen Masse $\mu = 1\text{GeV}$ und dem Wert (Gl. 4.3) für α ergibt sich $\mu\tau \approx 10^{31}$) führt unsere Methode somit zu Aussagen von hinreichender Genauigkeit. Dies umso mehr, wenn man bedenkt, daß bisher eine Lösung der im Folgenden diskutierten kosmologischen Modelle mit auch nur annähernd vergleichbarem Aufwand nicht möglich war.

4.4 Die Teilchenzahl

Die Berechnung der Gesamtzahl der erzeugten Teilchen aus der Erzeugungsrate (4.21) wirft ähnlich wie im elektrischen Feld ein Problem auf, da W nicht von χ abhängt. Eine Integration über $d\chi$ gemäß Gl. (3.19) würde also unendlich viele Teilchen liefern. Tatsächlich ist, da das de Sitter-Universum für alle Zeiten expandiert und entsprechend ständig (also unendlich lange) Teilchenerzeugung stattfindet, ein solches Ergebnis auch zu erwarten, solange man einen unendlich langen Zeitraum berücksichtigt.

Man kann aber feststellen, daß die Teilchenerzeugung in der Umgebung des Verzweigungspunktes stattfinden muß, weil nur dort der Weg von der Antiteilchen- auf die Teilchenebene übergehen kann. Da die physikalische Teilchenerzeugung dabei natürlich

entlang der reellen Zeitachse stattfindet, erhalten wir eine Abschätzungsmöglichkeit.

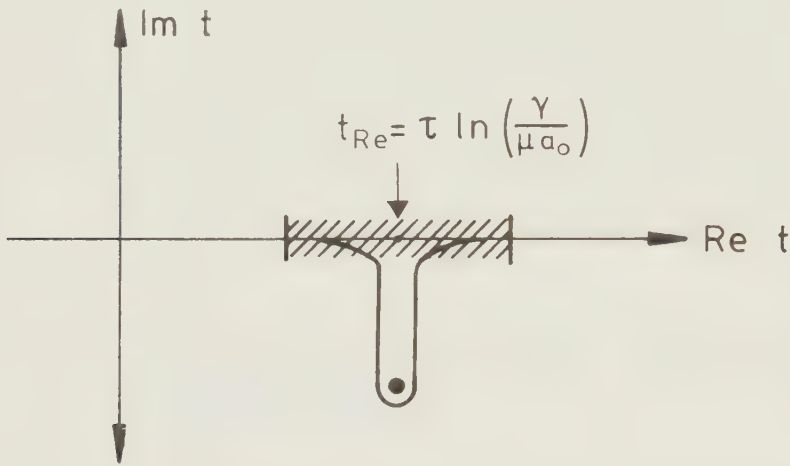


Abb. 9 zeigt den Erzeugungsbereich (schraffiert) auf der reellen Zeitachse oberhalb des Verzweigungspunktes.

Wir betrachten den Realteil t_{Re} , der den Verzweigungspunkt t_v beschreibenden Funktion (4.12):

$$t_{Re} = \tau \ln\left(\frac{\gamma}{\mu a_0}\right) \quad (4.30)$$

und stellen fest, daß die Erzeugung in einer gewissen Umgebung von t_{Re} stattfinden wird. Da t_{Re} eine Funktion von γ ist, sehen wir, daß Teilchen mit verschiedenem Impuls γ/R auch im Mittel zu verschiedenen Zeiten erzeugt werden.

Wir substituieren also γ durch t (t im Folgenden reell!):

$$d\gamma = \frac{\mu a_0}{\tau} e^{t/\tau} dt \quad (4.31)$$

und betrachten das Resultat pro Zeiteinheit dt und pro Volumeneinheit d^3x :

$$\frac{dN}{d^3x dt} = \frac{\mu^3 e^{-2\mu\pi\tau}}{\pi^2\tau} \cdot R(t)^3 \text{ mit } R(t) = a_0 e^{t/\tau} \quad (4.32)$$

$\frac{dN}{d^3x dt}$ beschreibt die Zahl der pro Koordinatenvolumen und Zeiteinheit erzeugten Teilchen. Bedenkt man, daß $d^3r = R^3 d^3x$ das physikalische Volumen beschreibt, so folgt

$$\frac{dN}{d^3r dt} = \frac{\mu^3 e^{-2\pi\mu\tau}}{\pi^2\tau} = \frac{1}{\pi^2\tau^4} (\mu\tau)^3 e^{-2\pi\tau\mu} \quad (4.33)$$

für die Teilchenerzeugung pro Zeit in einem infinitesimalen Volumen, das in normalen Einheiten gemessen wird. Man beobachtet also für große Massen μ einen exponentiellen Abfall der Erzeugungsrate, d.h., große Massen (in Einheiten von τ^{-1}) werden nicht produziert. Die Abhängigkeit der Teilchenzahl N von der Masse μ ist für ein geschlossenes Universum in Abb. (10) dargestellt. Betrachten wir den Grenzfall $\mu \rightarrow 0$, so erhalten wir wegen des Faktor μ^3 in Gl.(4.33) ebenfalls Null für die Anzahl der erzeugten Teilchen. Die typische Masse, die vom de Sitter-Kosmos erzeugt werden kann, liegt in der Größenordnung $\frac{1}{2\tau}$. Da $\tau = 4 \cdot 10^{17}$ sec ist, ergibt sich $\frac{1}{2\tau} = 10^{-33}$ eV, d.h., für alle praktischen Zwecke verschwindet die Teilchenerzeugung und wir befinden uns in Übereinstimmung mit der Aussage, daß de Sitter ein Universum mit $p = \varrho = 0$ ist.

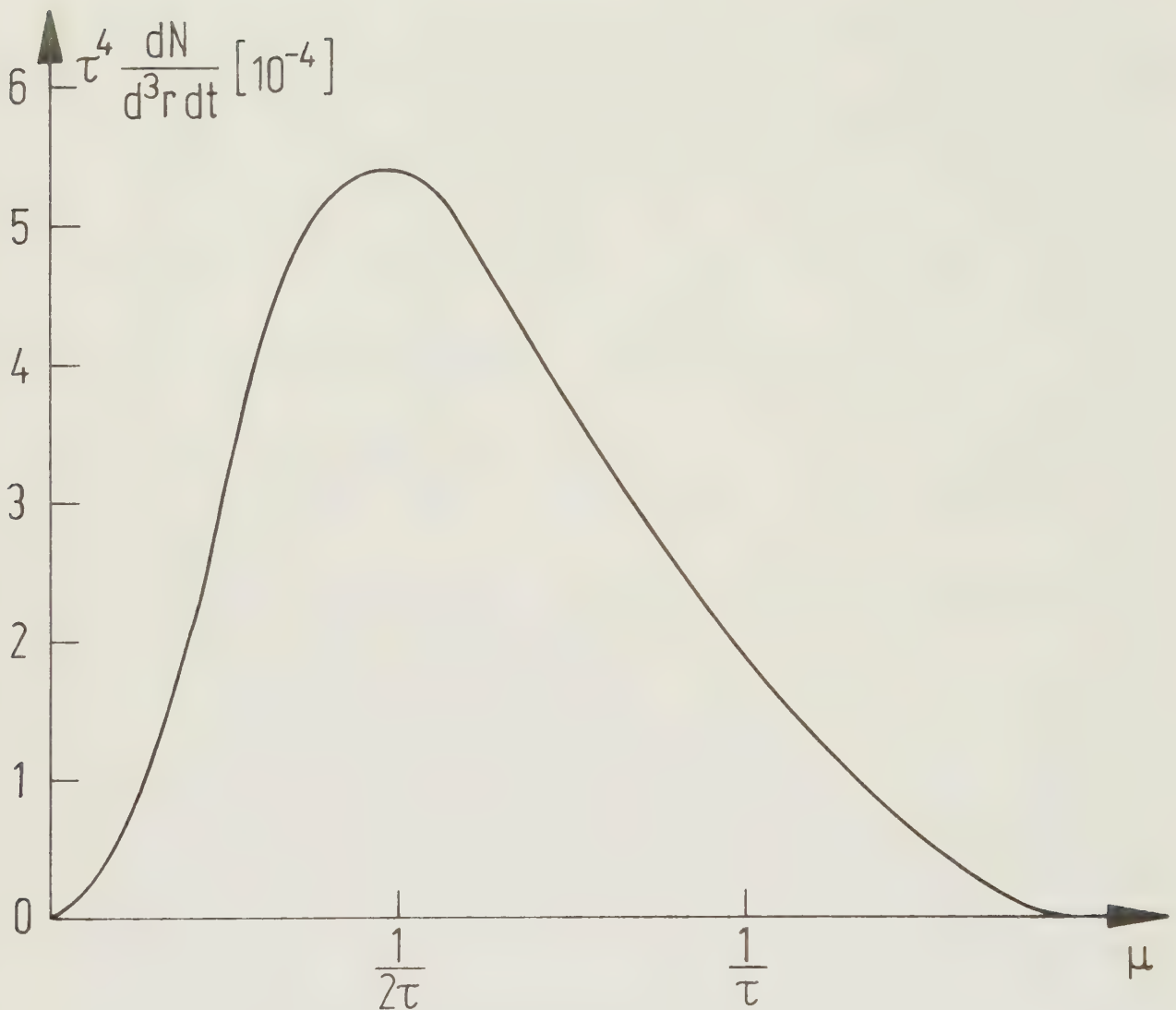


Abb. 10: Die Anzahl der erzeugten Teilchen (in Einheiten $\tau^4 \cdot 10^{-4}$) ist in Abhängigkeit von der Masse μ (in Einheiten $\frac{1}{\tau}$) aufgetragen.

4.5 Der Einfluß der Ereignishorizonten

Zum Abschluß dieses Kapitels möchte ich noch eine Anmerkung zur Frage eines eventuellen Einflusses des Ereignishorizontes

auf die Teilchenerzeugung im de Sitter-Universum machen.

Bei einer Transformation der geodätischen de Sitter-Metrik (4.1) in stationäre Koordinaten erhält man die Metrik für einen Beobachter im Punkt $r = 0$ (20):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{a_0^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r^2}{a_0^2}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.34)$$

Man sieht, daß bei $r = a_0$ ein Ereignishorizont vorliegt; aber im Gegensatz zum Schwarzschild-Ereignishorizont gelangt man bei dieser Metrik immer von innen (d.h. $r = 0$) nach außen zum Ereignishorizont bei $r = a_0$. Das bedeutet, daß jeder Beobachter einen "eigenen", ihn umgebenden Ereignishorizont besitzt, der jeweils innerhalb des de Sitter-Universums liegt. Ein Beobachter sieht also niemals den gesamten, unendlichen de Sitter-Raum, sondern nur eine "Blase" mit Radius a_0 .

Wenn man nun Teilchenerzeugung mit Hilfe von Energieeigenfunktionen berechnet⁽¹⁹⁾, so erhält man ein thermisches Spektrum:

$$W(\omega) = (e^{2\pi a_0 \omega} \pm 1)^{-1}$$

wobei ω die vom Beobachter gesehene Frequenz ist. Dasselbe Ergebnis wurde von Gibbons und Hawking⁽¹⁸⁾ mit Propagatormethoden erhalten. Tatsächlich hat man dann aber für beschleunigte Teilchen gerechnet, denn $r = \text{const.}$ ist keine Geodätische außer für den Punkt $r = 0$. Daß es bei der Zugrundelegung eines beschleunigten Koordinatensystems für den

entsprechenden Beobachter zu einer scheinbaren Teilchen-
erzeugung kommt, ist schon vom Minkowski-Raum her bekannt.
Wie zuerst von Fulling (57), später von Unruh (58),
Soffel (59) u.v.a. gezeigt worden ist, erscheint das
Minkowski-Vakuum von thermisch verteilten Teilchen be-
völkert, wenn man es auf die Eigenfunktionen bezüglich der
Rindler-Frequenz projiziert. Genau dasselbe passiert im
de Sitter-Raum.

Bei der hier verwendeten Methode der quasiklassischen Nähe-
rung kann das Problem, unabhängig davon, ob man nun Metrik (4.1)
oder (4.34) verwendet, nicht auftreten, da die Teilchen selbst
immer mit der klassischen Gleichung für die Geodätische, näm-
lich mit der Hamilton-Jacobi-Gleichung definiert werden. Will
man die Rückwirkung der erzeugten Teilchen auf die Geometrie
des Raumes berechnen, so braucht man einen kovarianten Aus-
druck für den Energie-Impulstensor. Die Kovarianz ist aber nur
gewährleistet, wenn man die Teilchenerzeugung selbst kovariant
behandelt, nicht jedoch, wenn die Teilchen beobachterabhängig
definiert sind.

5. Physikalische Teilchenerzeugung: Friedmann-Universum

Nachdem wir das unphysikalische, aber vom mathematischen Standpunkt aus interessante de Sitter-Universum betrachtet haben, wenden wir uns nun der Untersuchung der physikalischen Modelle zu.

5.1 Das ultrarelativistische Fermi-Gas

Zunächst diskutieren wir das von einem ultrarelativistischen (Fermi-) Gas erfüllte Friedmann-Universum. Der Ausdruck "Friedmann-Universum" bedeutet, daß wir in der Robertson-Walker-Metrik (Gl. 3.1) für das Expansionsgesetz eine aus der Einsteingleichung hergeleitete Beziehung verwenden.

Die Einsteingleichungen lauten (60):

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3} \varrho R^2 \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dR} (\varrho R^3) = -3 p R^2 \quad (5.2)$$

Als Zustandsgleichung verwenden wir zunächst, wie soeben schon gesagt, das relativistische Fermi-Gas:

$$p = \frac{1}{3} \varrho \quad (5.3)$$

Einsetzen der Zustandsgleichung in Gl. (5.2) ergibt nach Integration

$$\varrho = \frac{a}{R^4} \quad (5.4)$$

wobei a eine Integrationskonstante ist. Einsetzen dieser Beziehung in Gl. (5.1) liefert das Expansionsgesetz (a und $\frac{8\pi G}{3}$ wurden zur Konstanten D_0 zusammengefaßt):

$$\dot{R} = \sqrt{\left(\frac{D_0}{R}\right)^2 - k} \quad (5.5)$$

Dabei ist D_0 der Schwarzschildradius des Universums; im Fall $p = 0$ gilt $D_0 = \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \rho\right) \frac{2G}{c^2}$ (48).

Zu berechnen ist also

$$W = e^{-2 \operatorname{Im} \left\{ -2 \int_0^{-i\frac{\gamma}{\mu}} \sqrt{\frac{R^2 \mu^2 + \gamma^2}{D_0^2 - k R^2}} dR \right\}} \quad (5.6)$$

wobei die Integration über dt durch eine solche über dR ersetzt wurde mit $dt = dR/\dot{R}$ und das Expansionsgesetz (5.5) in Gl. (3.12) eingesetzt wurde. Der Verzweigungspunkt wurde wieder aus der Bedingung

$$R^2 \mu^2 + \gamma^2 = 0 \quad (5.7)$$

bestimmt, wie schon weiter vorn ausführlich erläutert.

Mit Hilfe der Substitution $R = -\frac{i\gamma}{\mu} s$ erhält man daraus:

$$W = \exp \left\{ -\frac{4\gamma^2}{D_0 \mu} \int_0^1 ds \sqrt{\frac{1-s^2}{1+k\left(\frac{\gamma}{D_0 \mu} s\right)^2}} \right\} \quad (5.8)$$

Mit $\beta = \left(\frac{\gamma}{D_0 \mu}\right)$ und der Substitution $s^2 = x$ folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} \int_0^1 ds \sqrt{\frac{1-s^2}{1+k\beta^2 s^2}} &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \sqrt{\frac{1-x}{x(1+k\beta^2 x)}} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{2 \Gamma(2)} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; -k\beta^2\right) \\ &= \frac{\pi}{4} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; -k\beta^2\right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Die Wahrscheinlichkeit für die Erzeugung eines Paares ist also

$$W = \exp \left\{ -\pi D_0 \mu \beta^2 {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; -k\beta^2 \right) \right\} \quad (5.10)$$

D_0 ist der Schwarzschildradius des Universums ($\approx 10^{25} \text{ m}$),
 μ die Masse der erzeugten Teilchen (für Protonen $\mu = \frac{1}{\lambda_c} = 10^{15} \text{ m}^{-1}$)
 und γ das Produkt aus ihrem Impuls und dem Krümmungsradius R .
 Um die Größenordnung von β abzuschätzen, zerlegen wir den Ausdruck

$$\beta = \frac{\gamma}{D_0 \mu} = \frac{p}{\mu} \frac{R}{D_0} \quad (5.11)$$

Es ist immer $\frac{R}{D_0} \lesssim 1$ und p/μ entspricht der (nichtrelativistischen) Geschwindigkeit des erzeugten Teilchens, ist also sicher ebenfalls kleiner als Eins (wir hatten $c \equiv 1$). Dabei ist zu bemerken, daß die zeitunabhängige Konstante γ in zwei zeitabhängige Anteile p und R zerlegt wurde. Diese Zerlegung erfolgt für asymptotische Zeiten, nicht zur Zeit des Entstehungsprozesses. Damit erhalten wir:

$$\beta = \left(\frac{\gamma}{\mu D_0} \right) < 1 \quad (5.12)$$

In diesem Bereich ist die folgende Entwicklung der hypergeometrischen Funktion erlaubt:

$${}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; -k\beta^2 \right) = 1 - \frac{k\beta^2}{8} + \frac{3}{64} (k\beta^2)^2 \pm \dots \quad (5.13)$$

wobei wir den quadratischen Term mit Sicherheit vernachlässigen können. Die Teilchenproduktionsrate (5.10) lautet damit:

$$W = \exp \left\{ -\pi D_0 \mu \left(\frac{\gamma^2}{D_0^2 \mu^2} - \frac{k}{8} \frac{\gamma^4}{D_0^4 \mu^4} \right) \right\} \quad (5.14)$$

Gl. (5.14) beschreibt die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen-Antiteilchenpaar im Zustand χ zu erzeugen. Eine Integration von (5.14) über $d^3\chi$ entsprechend Gl. (3.19) liefert dann die Anzahl N pro Koordinatenvolumen d^3x der insgesamt erzeugten Teilchen ($W_0 = 1$):

$$\frac{dN}{d^3x} = \frac{2S+1}{(2\pi)^3} (D_0\mu)^{3/2} \left\{ 1 + \frac{15}{32} \frac{k}{(\pi\mu D_0)^2} + \dots \right\} \quad (5.15)$$

wobei S der Spin der erzeugten Teilchen ist. Dabei sei noch darauf hingewiesen, daß wir jetzt nicht mehr $\frac{dN}{dt d^3x}$ angeben, da der Zeitraum der Teilchenerzeugung auf die nur anfänglich starke Expansion beschränkt ist. Im Gegensatz dazu findet im sich mit konstanter Expansionsgeschwindigkeit entwickelnden de Sitter-Universum die Teilchenerzeugung fortgesetzt statt, vergleichbar der Teilchenerzeugung im elektrischen Feld. Die Anzahl der erzeugten Teilchen (5.15) wurde unter der Annahme ausgerechnet, daß es sich um Punktteilchen handelt. Da die Teilchenpaare dann erzeugt werden, wenn die Gravitationsfelder so stark sind, daß die Gezeitenkräfte über eine Compton-Wellenlänge ausreichen, die Teilchen-Antiteilchenpaare zu trennen, müßte man für nichtelementare Teilchen (z.B. Protonen) deren innere Struktur berücksichtigen. Um dies zu vermeiden, beschränken wir uns im Weiteren auf die wirklich elementaren (d.h. im Bereich ihrer eigenen Compton-Wellenlänge strukturlosen) Teilchen, also auf Leptonen und Quarks. Es ist offensichtlich, daß Gl. (5.15) nur für wirklich

elementare (strukturlose) Teilchen anwendbar ist, also für Leptonen und Quarks.

Für Fermionen ($s = \frac{1}{2}$) in einem geschlossenen Universum ($k = + 1$) ist das Koordinaten-Volumen $d^3x = 2 \pi^2$, und das physikalische Volumen dann $2 \pi^2 \cdot R^3$. Bei Zugrundelegung einer typischen Masse von 1 GeV ergibt sich dann

$$N \sim 10^{63} .$$

Die sich für andere bekannte Teilchensorten ergebenden Werte sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

Leptonen			Quarks				
e	μ	τ	u	d	s	c	b
$1.2 \cdot 10^{58}$	$3.8 \cdot 10^{61}$	$2.7 \cdot 10^{63}$	$2.9 \cdot 10^{59}$	$7.1 \cdot 10^{59}$	$6.4 \cdot 10^{61}$	$2.0 \cdot 10^{63}$	$1.1 \cdot 10^{64}$

Wie man sieht, sind die Variationen so gering, daß in Anbetracht der Unkenntnis der eingehenden Größen eine Abschätzung mit $\mu = 1$ GeV durchaus sinnvoll ist und auch die Summation über die verschiedenen Teilchenarten ändert nichts Wesentliches an der Größenordnung. Wir werden darauf in der Diskussion (Kap. 7) nochmals zurückkommen.

In Berücksichtigung der Abschätzung für β (Gl. 5.12) vernach-

lässigen wir in Gl. (5.14) den Term in χ^4 und erhalten

$$W = e^{-\frac{\pi \chi^2}{\mu D_0}} \quad (5.16)$$

Die Erzeugungswahrscheinlichkeit ist also in sehr guter Näherung von k , d.h., von der globalen Topologie des Raumes (offen, geschlossen, mit positiver oder negativer Krümmung) unabhängig. Auf die Teilchenerzeugung hat also die Wahl des Parameters $k = -1, 0, +1$ praktisch keinen Einfluß, und es reicht daher aus, im Folgenden $k = 0$ zu betrachten.

5.2 Die verallgemeinerte Zustandsgleichung $p = \alpha g$.

Die Zustandsgleichung $p = g/3$ lieferte offenbar weit weniger Teilchen, als der Eddington-Zahl ($\sim 10^{78}$), also der Zahl der nach heutigem Kenntnisstand der Astronomie im Universum vorhandenen Teilchen entsprechen würde. Ich habe deshalb im Folgenden eine allgemeinere Zustandsgleichung gewählt:

$$p = \alpha g \quad \text{mit } 0 \leq \alpha < 1 \quad (5.17)$$

Aus der Anpassung des Parameters α an die experimentell bekannte asymptotische Teilchenzahl kann man dann eine Aussage über die das Universum für extrem hohe Dichten beherrschende Zustandsgleichung gewinnen.

Der Parameter α ist mit der Schallgeschwindigkeit in dieser Materie verknüpft über:

$$v_s^2 = \frac{dp}{dg} = \alpha \quad (5.18)$$

Der oben angenommene Bereich (5.17) für α überstreicht also gerade die physikalisch zulässigen Schallgeschwindigkeiten. Es ist klar, daß in einem konkreten Modell für die Materie bei hohen Dichten α selbst ϱ -abhängig wird; man kann aber fragen, was $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \alpha(\varrho) = \alpha(\infty)$ bedeutet.

Es existieren zwei Möglichkeiten:

Dominiert bei großen Dichten die kinetische Energie der Teilchen oder wird die Wechselwirkung durch masselose Bosonen vermittelt, so ist $\alpha(\infty) = \frac{1}{3}$ ⁽⁶¹⁾; dies ist der üblicherweise anerkannte Fall. Wird jedoch die Wechselwirkung bei kleinen Abständen durch Austausch massiver Vektormesonen erzeugt, so ist es denkbar, daß $\alpha(\infty) = 1$ wird, α also den größtmöglichen Wert annimmt. Modelle dieser Art finden sich bei Zeldovich ⁽⁶²⁾ und Walecka ⁽⁶³⁾.

Das Expansionsgesetz lautet mit Gl. (5.17):

$$\frac{dR}{dt} = \left(\frac{D_0}{R}\right) \frac{3\alpha+1}{2} \quad (5.19)$$

Einsetzen in die inzwischen mehrfach diskutierte Beziehung für die Erzeugungsrate (3.12) liefert wieder mit der Substitution $dt \rightarrow dR$):

$$W = \exp \left\{ -2 \operatorname{Im} D_0 - \frac{3\alpha+1}{2} \int_0^R \sqrt{(R^2 \mu^2 + \gamma^2)} R^{(3\alpha-1)} dR \right\} \quad (5.20)$$

Die Verzweigungspunkte $R_{1/2} = \pm i \frac{\gamma}{\mu}$ wurden durch Nullsetzen des Integranden bestimmt und die Integration erfolgt - wie schon aus-

föhrlich diskutiert - auf der unteren der zweiblättrigen Riemannschen Ebene, der wir die negativen Werte der Wurzel zuordnen, von der reellen Achse zum Verzweigungspunkt $(-\frac{i\gamma}{\mu})$ und dann entsprechend auf der oberen Ebene mit positiven Werten der Wurzel zurück zur reellen Achse.

Zu lösen ist also das Integral

$$\mathcal{J} = -2 \int_0^{-\frac{i\gamma}{\mu}} \sqrt{(R^2 \mu^2 + \gamma^2) R^{3\alpha-1}} dR \quad (5.21)$$

Durch die Substitution $R = -\frac{i\gamma}{\mu} s$ wird (5.21) in Normalform gebracht:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{2i\gamma^2}{\mu} \left(-\frac{i\gamma}{\mu}\right)^{\frac{3\alpha-1}{2}} \int_0^1 \sqrt{(1-s^2)s^{3\alpha-1}} ds \\ &= \frac{2i\gamma^2}{\mu} \left(-\frac{i\gamma}{\mu}\right)^{\frac{3\alpha-1}{2}} \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{3\alpha+1}{4}, \frac{3}{2}\right) \quad \text{Ref (64)} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Die Beta-Funktion ist definiert als $B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$,^{Ref (65)} damit folgt

$$\mathcal{J} = \frac{i\gamma^2}{\mu} \left(-\frac{i\gamma}{\mu}\right)^{\frac{3\alpha-1}{2}} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3\alpha+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\alpha+7}{4}\right)} \quad (5.23)$$

Man erhält also für Gl. (5.20):

$$W = \exp \left\{ 2 \operatorname{Im} \left[\gamma \left(\frac{-i\gamma}{\mu D_0}\right)^{\frac{3\alpha+1}{2}} \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{3\alpha+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\alpha+7}{4}\right)} \right] \right\} \quad (5.24)$$

Um den Imaginärteil explizit schreiben zu können, wird der γ -abhängige Faktor im Exponenten umgeformt:

$$\left(\frac{-i\gamma}{\mu D_0}\right)^{\frac{3\alpha+1}{2}} = (-i)^{\frac{3\alpha+1}{2}} \left(\frac{\gamma}{\mu D_0}\right)^{\frac{3\alpha+1}{2}} \quad (5.25)$$

mit der Beziehung

$$(-i)^{\frac{3\alpha+1}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{4}(3\alpha+1)\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}(3\alpha+1)\right) \quad (5.26)$$

ist die Teilchenerzeugungsrate gegeben durch:

$$W = \exp \left\{ - \gamma \sin\left(\frac{\pi}{4}(3\alpha+1)\right) \left(\frac{\gamma}{\mu D_0}\right)^{\frac{3\alpha+1}{2}} \frac{\pi \Gamma\left(\frac{3\alpha+1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3\alpha+7}{4}\right)} \right\} \quad (5.27)$$

Unter Verwendung der Relation $\Gamma(x) \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}$ erhält man schließlich:

$$W = W_0 \exp \left\{ - \gamma \left(\frac{\gamma}{\mu D_0}\right)^{\frac{3\alpha+1}{2}} \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3-3\alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7+3\alpha}{4}\right)} \right\} \quad (5.28)$$

Gleichung (5.10) ist in diesem Resultat als Spezialfall enthalten. Der γ -unabhängige Anteil von Gl. (5.28), $f(\alpha) =$

$$= \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3-3\alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7+3\alpha}{4}\right)} \quad \text{ist in Abb. (11) aufgetragen. Gl. (5.28)}$$

beschreibt die asymptotische Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen-Antiteilchenpaar mit Impuls γ und der Masse μ erzeugt wurde.

Zur Berechnung der Gesamtzahl N der erzeugten Teilchen wird wieder Gl. (3.19) herangezogen:

$$N = \int d^3x \int \frac{d^3\gamma}{(2\pi)^3} \cdot 2 W(\gamma) \quad (5.29)$$

und die Anzahl der Teilchen wird pro Koordinaten-Volumeneinheit betrachtet.

$$\frac{dN}{d^3x} = \frac{2 \cdot 4\pi}{(2)^3} \int_0^\infty d\gamma \cdot \gamma^2 \exp \left\{ \frac{-\pi^{3/2} \gamma \left(\frac{\gamma}{\mu D_0}\right)^{\frac{3\alpha+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{3-3\alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7+3\alpha}{4}\right)} \right\} \quad (5.30)$$

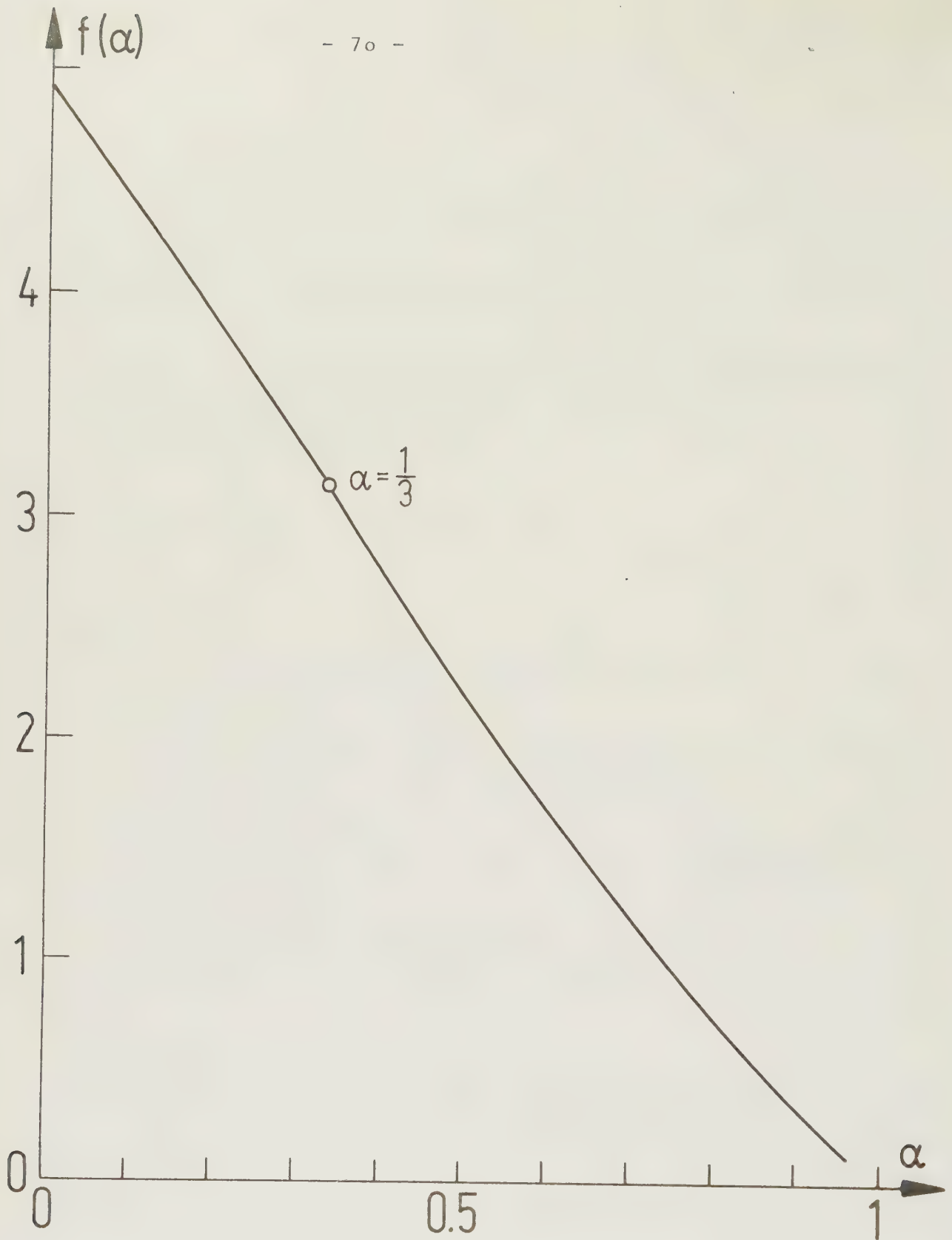


Abb. 11 zeigt den von γ unabhängigen Teil des Exponenten in (Gl. 5.28) in Abhängigkeit vom Parameter der Zustandsgleichung α .

Den von γ unabhängigen Anteil fassen wir zur Konstanten A zusammen:

$$A = \left(\frac{1}{\mu D_o} \right)^{\frac{3\alpha+1}{2}} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3\alpha+7}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3-3\alpha}{4}\right)} \quad (5.31)$$

und haben dann:

$$\frac{dN}{d^3x} = \frac{2 \cdot 4\pi}{(2\pi)^3} \int_0^\infty d\gamma \quad (\gamma^2 e^{-A\gamma^{\frac{3\alpha+3}{2}}}) \quad (5.32)$$

Dieses Integral läßt sich analytisch ausführen, man erhält als Ergebnis:

$$\frac{dN}{d^3x} = (\mu D_o)^{\frac{3\alpha+1}{\alpha+1}} \cdot \frac{2}{3\pi^2} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1} (\pi^{-3/2} \Gamma\left(\frac{3-3\alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7+3\alpha}{4}\right))^{\frac{2}{\alpha+1}}, \quad (5.33)$$

wobei die numerische Auswertung des von (μD_o) unabhängigen Faktors

$$n(\alpha) = \frac{2}{3\pi^2} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha+1}\right)}{\alpha+1} (\pi^{-3/2} \Gamma\left(\frac{3-3\alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7+3\alpha}{4}\right))^{\frac{2}{\alpha+1}} \quad (5.34)$$

in Abb. (12) gegeben ist.

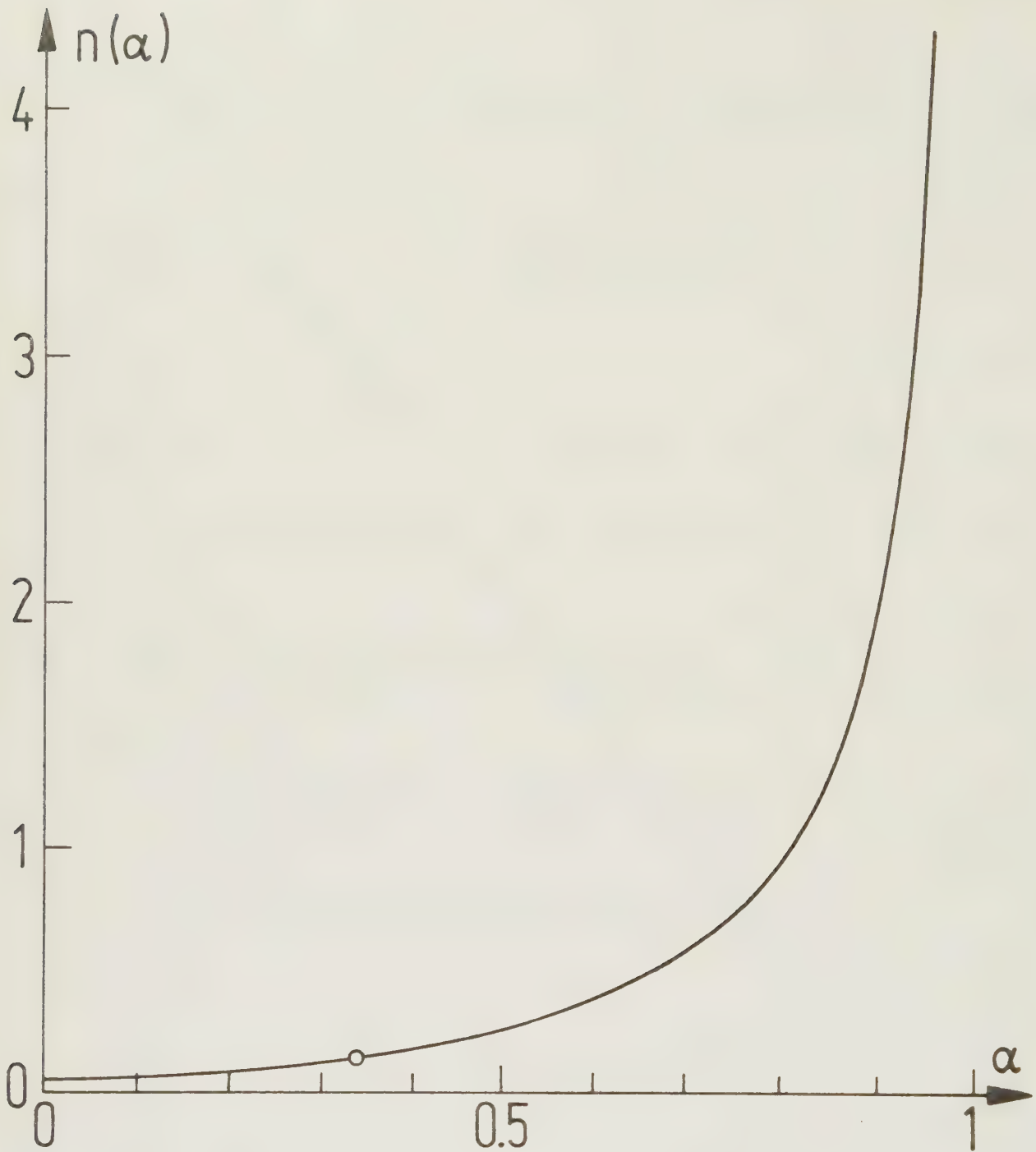


Abb. 12 zeigt den δ -unabhängigen Faktor $n(\alpha)$ der Anzahl der erzeugten Teilchen (Ordinate) in Abhängigkeit vom Parameter α der Zustandsgleichung

5.3 Diskussion der Ergebnisse

An dieser Stelle wollen wir zunächst einige Spezialfälle diskutieren:

- $\alpha = -1$: Formal entspricht dies genau dem de Sitter-Universum (der kosmologische Term in den Feldgleichungen hat die Struktur $p = -\rho$). Das im vorigen Kapitel abgeleitete Resultat wird in erster Ordnung reproduziert. Gl. 5.18 ist für negative α natürlich sinnlos, d.h., solche Modelle sind nicht im Sinne einer Hydrodynamik interpretierbar.
- $\alpha = -\frac{1}{3}$: Diese Parameterwahl entspricht formal dem von Chitre und Hartle ⁽²¹⁾ ad hoc gewählten Expansionsgesetz $R(t) = t$. Das von ihnen errechnete Resultat stimmt exakt mit unserem Ergebnis überein. Dabei ist zu bemerken, daß Chitre und Hartle explizit die volle Integration über alle Wege durchgeführt haben, also nicht die quasiklassische Näherung gemacht haben.
- $\alpha = 0$: Dieser Parameter entspricht einer "weichen" Zustandsgleichung, d.h., mit vernachlässigbarem Druck, wie sie etwa im asymptotischen Grenzfall des Hagedorn-Modells vorliegt ⁽⁶⁶⁾. Bei diesem Modell wird angenommen, daß bei hoher Dichte das Spektrum der Elementarteilchenmassen so schnell anwächst, daß eine Grenztemperatur erreicht wird (statistical bootstrap).

Im Grenzfall führt dies zu einem im Wesentlichen nicht wechselwirkenden Gas aus Hadronen. Unsere Rechnung liefert ca. 10^{40} Teilchen bei Zugrundelegung der Protonenmasse, also um viele Größenordnungen zu wenig.

$\alpha = \frac{1}{3}$: beschreibt das ultrarelativistische Gas. Damit erhält man das Standardmodell des strahlungsdominierten Universums mit Urknall, wie es Gamow ⁽⁶⁷⁾ ursprünglich vorgeschlagen hat, allerdings jetzt extrapoliert bis in die hadronische Epoche. Nach heutigen Vorstellungen entspricht ihm etwa folgendes Modell der Kernmaterie bei hohen Dichten: Man weiß, daß die Wechselwirkung zwischen Quarks bei kleinen Abständen vernachlässigbar wird. Dies ist unter dem Schlagwort "asymptotic freedom" bekannt. In der dem vorliegenden Modell entsprechenden Quark-Materie bewegen sich die Teilchen quasifrei und hochrelativistisch. Dieser Fall wurde in (5.1) gesondert behandelt. Die errechnete Teilchenzahl liegt bei 10^{63} (für Protonenmasse), was immer noch viel zu niedrig im Vergleich zur beobachteten Teilchenzahl ist.

$\alpha \approx 1$: Beschreibt eine "harte" Zustandsgleichung, wie sie zuerst von Zeldovich ⁽⁶²⁾ vorgeschlagen wurde. Ihr könnte folgendes Modell zugrunde liegen: Bei mehr als

Kerndichte erwartet man, daß die Nukleonen sehr stark wechselwirken, vor allem über Mesonenaustausch. Dieser wird bei hohen Energien dominieren, falls kein Übergang von der Kernmaterie zur asymptotisch freien Quarkmaterie stattfindet (Zur Erläuterung des Zeldovich-Modells vgl. Anhang A3). Diese Vorstellungen wurden von Walecka ^(63,68,69) weiter ausgearbeitet. Auf der Basis der p-p-Streuung bei hohen Energien schließt auch Canuto ⁽⁷⁰⁾, daß eine solche harte Zustandsgleichung bevorzugt sei. Eine ausführliche Diskussion der für $p=8$ sprechenden Argumente gibt Barrow ⁽⁷⁷⁾, dessen Überlegungen in A4 referiert sind.

Unser Ausdruck für $\frac{dN}{d^3x}$ liefert für $\alpha = 1$ kein sinnvolles Ergebnis, da in diesem Fall $\text{Im}S_{c1}=0$ ist. Wir setzen deshalb $\alpha=1-\epsilon$ in die Teilchenerzeugungsrate (5.28) und die Teilchenanzahl $\log N$ (5.33) ein und erhalten in niedrigster Ordnung von ϵ :

$$W = W_0 \exp \left\{ -\gamma \left(\frac{\gamma}{\mu D_0} \right)^2 \cdot \epsilon \pi \right\} \quad (5.35)$$

sowie (für das geschlossene Universum):

$$\log N = \log (2/3\pi\epsilon) + 2 \log (D_0\mu) \quad (5.36)$$

Gl. (5.36) divergiert logarithmisch in ϵ . Es handelt sich dabei allerdings um eine langsame Divergenz, so daß man vermuten kann, daß bei langsamer Annäherung

$\alpha(q) \xrightarrow{q \rightarrow \infty} 1$ (etwa mit $\frac{dp}{dq} = 1 - \frac{\beta}{q}$) die logarithmische Divergenz verschwindet und man einen endlichen Ausdruck erhält, der klein gegen $\log(\mu D_0)$ sein wird. Eine Zustandsgleichung mit $\alpha \rightarrow 1$ für $q \rightarrow \infty$ wird daher eine Teilchenzahl von der Größenordnung 10^{82} liefern.

Dies stimmt in etwa mit der tatsächlich beobachteten Teilchenzahl überein; vor allem, wenn man bedenkt, daß nur ein kleiner Teil der ursprünglich erzeugten Paare (vielleicht $10^{-8} - 10^{-10}$ (71)) bis heute überlebt hat, während der überwiegende Teil zur Photonen rekombinierte und einen Beitrag zur heutigen Hintergrundstrahlung darstellt.

Der Zusammenhang $N = N(\alpha)$ gemäß Gl. (5.33) ist für ein geschlossenes Universum ($k = +1$) in Fig. (13) dargestellt, wobei für μ die Masse des Protons (938 MeV) zugrunde gelegt wurde und für D_0 , den maximalen Krümmungsradius, 10^{25} m. (Andere Massen bringen, wie oben (S. 65) diskutiert, keine große Änderung). Die Zustandsgleichung des ultrarelativistischen Gases (schwach wechselwirkend) ist offenbar nicht geeignet, die beobachtete Teilchenzahl (10^{78}) zu erklären. Um in Übereinstimmung mit der Eddingtonzahl zu gelangen, müßte die Zustandsgleichung

$$p \geq \frac{4}{5} \epsilon \quad (5.37)$$

lauten, was nur in sehr stark wechselwirkenden Systemen der Fall sein kann.

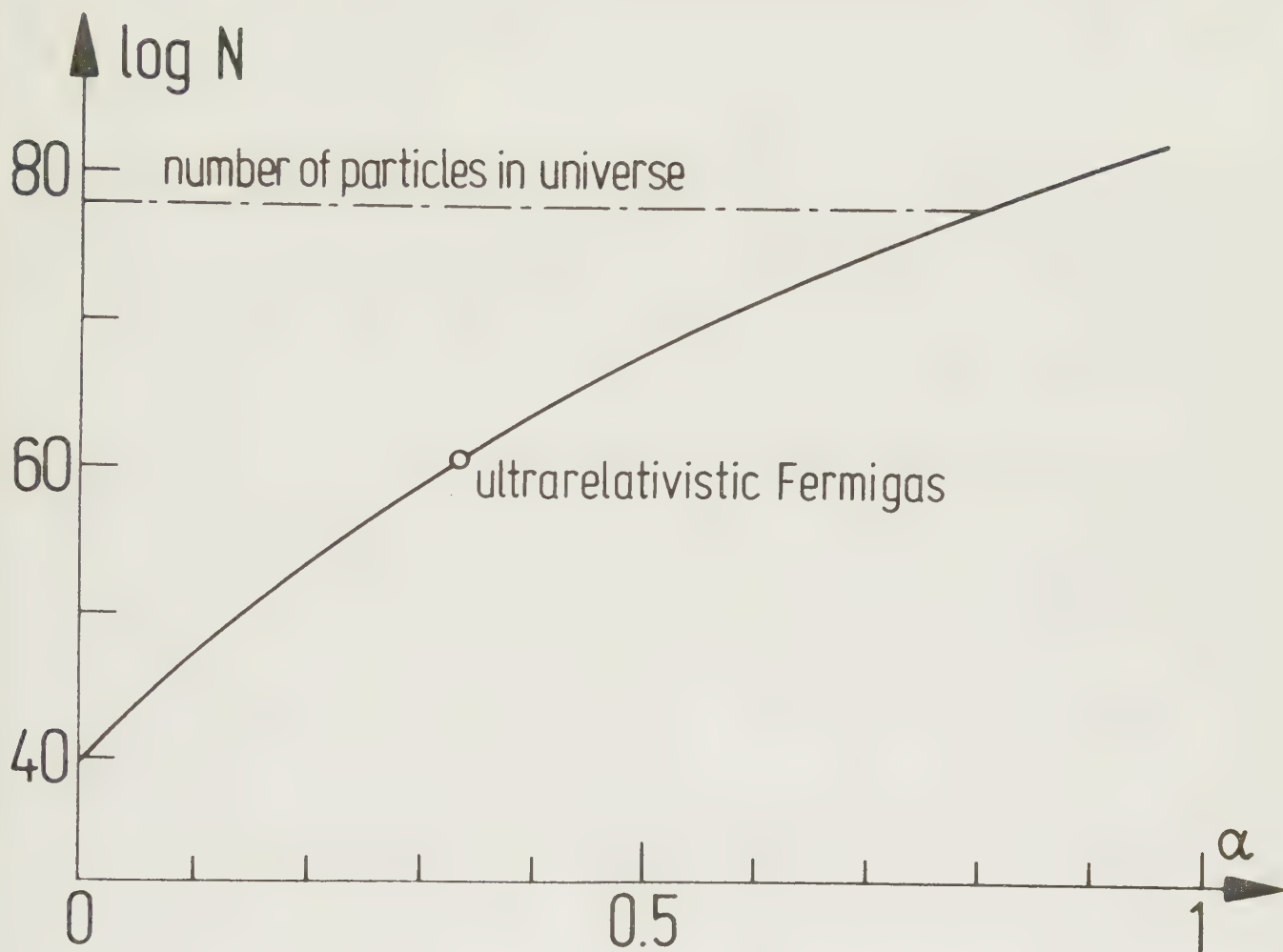


Abb. 13 zeigt die Anzahl der erzeugten Teilchen in einem logarithmischen Maßstab (Ordinate) in Abhängigkeit des Zustandsparameters (Abzisse), für ein geschlossenes Universum ($k = +1$).

Es läßt sich nun abschätzen, bei welchen Materiedichten die Teilchenerzeugung überhaupt stattfindet: Paarerzeugung, die natürlich physikalisch nur in der reellen Zeit beobachtet werden kann, findet im Wesentlichen in einer Umgebung

$$R \leq \frac{\chi}{\mu} \quad (5.38)$$

oberhalb des Verzweigungspunktes auf der reellen R-Achse statt. Verwendet man das Impulsspektrum $W(\chi) = W(p \cdot R)$ der Gl.(5.28), dann erhält man für den mittleren Impuls der erzeugten Teilchen:

$$\langle \chi \rangle = \frac{d^3 \chi \cdot \chi W(\chi)}{d^3 \chi \cdot W(\chi)} \sim (\mu D_0)^{\frac{3\alpha+1}{3(\alpha+1)}} \quad (5.39)$$

Diesen Wert kann man mit Hilfe von Gl. (5.38) in einen zugehörigen mittleren Radius

$$\langle R \rangle = D_0 (\mu D_0)^{-\frac{2}{3(\alpha+1)}} \quad , (5.40)$$

bei dem die Teilchenerzeugung stattfindet, umrechnen, und es läßt sich somit auch eine Aussage über die Dichte zum Erzeugungszeitpunkt machen:

$$\langle \rho \rangle = \rho_{\text{heute}} \cdot (\mu D_0)^{\frac{2}{\alpha+1}} \quad (5.41)$$

Der Zusammenhang 5.41 $\langle \rho(\alpha) \rangle$ ist in Fig. (14 a) dargestellt. Wie man sieht, findet die Erzeugung stets oberhalb der Kerndichte statt, für $\alpha=1$ beträgt der Unterschied jedoch nur wenige Größenordnungen. Demgegenüber gelangt man mit einer weichen Zustandsgleichung schnell in Dichtebereiche, über die die

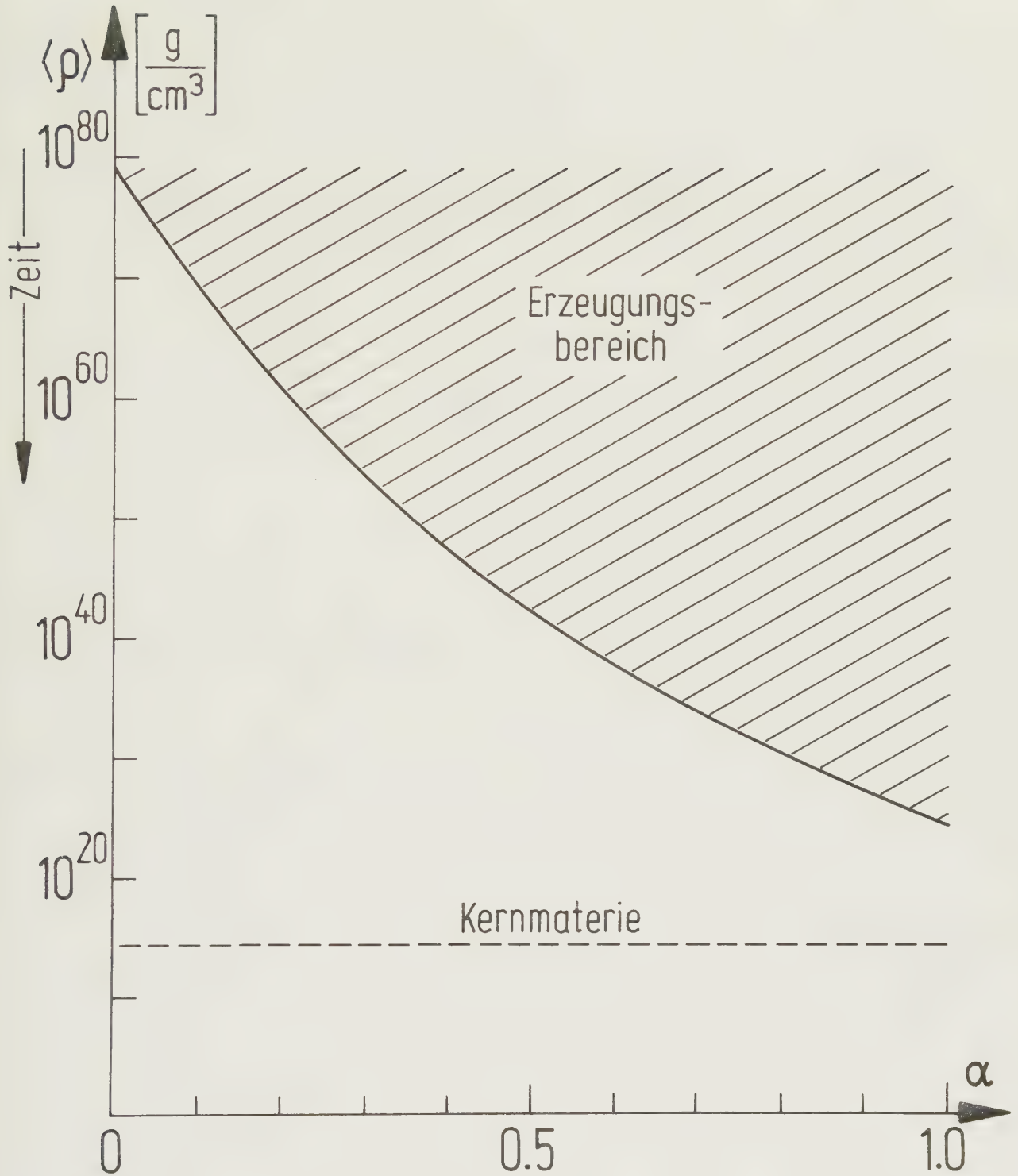


Abb. 14a zeigt die mittlere Erzeugungsdichte $\langle \rho \rangle$ in $[\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}]$ in Abhängigkeit vom Parameter α der Zustandsgleichung.

heutige Physik noch so gut wie nichts aussagen kann. Da große Dichten einem kleinen Weltradius und damit frühen Zeiten entsprechen, wird die Teilchenproduktion im Wesentlichen oberhalb und auf der $\langle g(\alpha) \rangle$ -Kurve stattfinden, sicher nicht weit unterhalb.

Aus der Zahl der produzierten Teilchen hatten wir geschlossen, daß eine Zustandsgleichung $p = g$ favorisiert zu sein scheint. Betrachtet man den mittleren Radius (Gl. 5.40) für $\alpha = 1$ (Abb. 14 b), so erhalten wir $\langle R \rangle = 3 \cdot 10^{11}$ m. Daraus läßt sich anhand von Abb. 1 die zugehörige Temperatur zu etwa 100 GeV abschätzen (Bei diesen Angaben muß man natürlich immer noch Abweichungen von einigen Größenordnungen in Betracht ziehen).

Es erscheint also nicht undenkbar, daß bei dieser Temperatur mehr als 16 Quarks angeregt werden können, was die durch $p = \frac{1}{3}$ beschriebene asymptotische Freiheit der Quarkmaterie zerstören würde.

Im Folgenden will ich noch eine Abschätzung für die Entropie geben, die bei der Paarproduktion erzeugt wird. Die heutige Entropie ist im wesentlichen in der Hintergrundstrahlung enthalten und bis auf einen kleinen Faktor gleich der Anzahl der Photonen in derselben. Der heute beobachtete Wert beträgt $S \approx 3 \cdot 10^9$ pro Baryon⁽⁷²⁾. Falls sich unsere Betrachtungen nicht als unsinnig erweisen sollen, darf die durch Paarerzeugung ge-

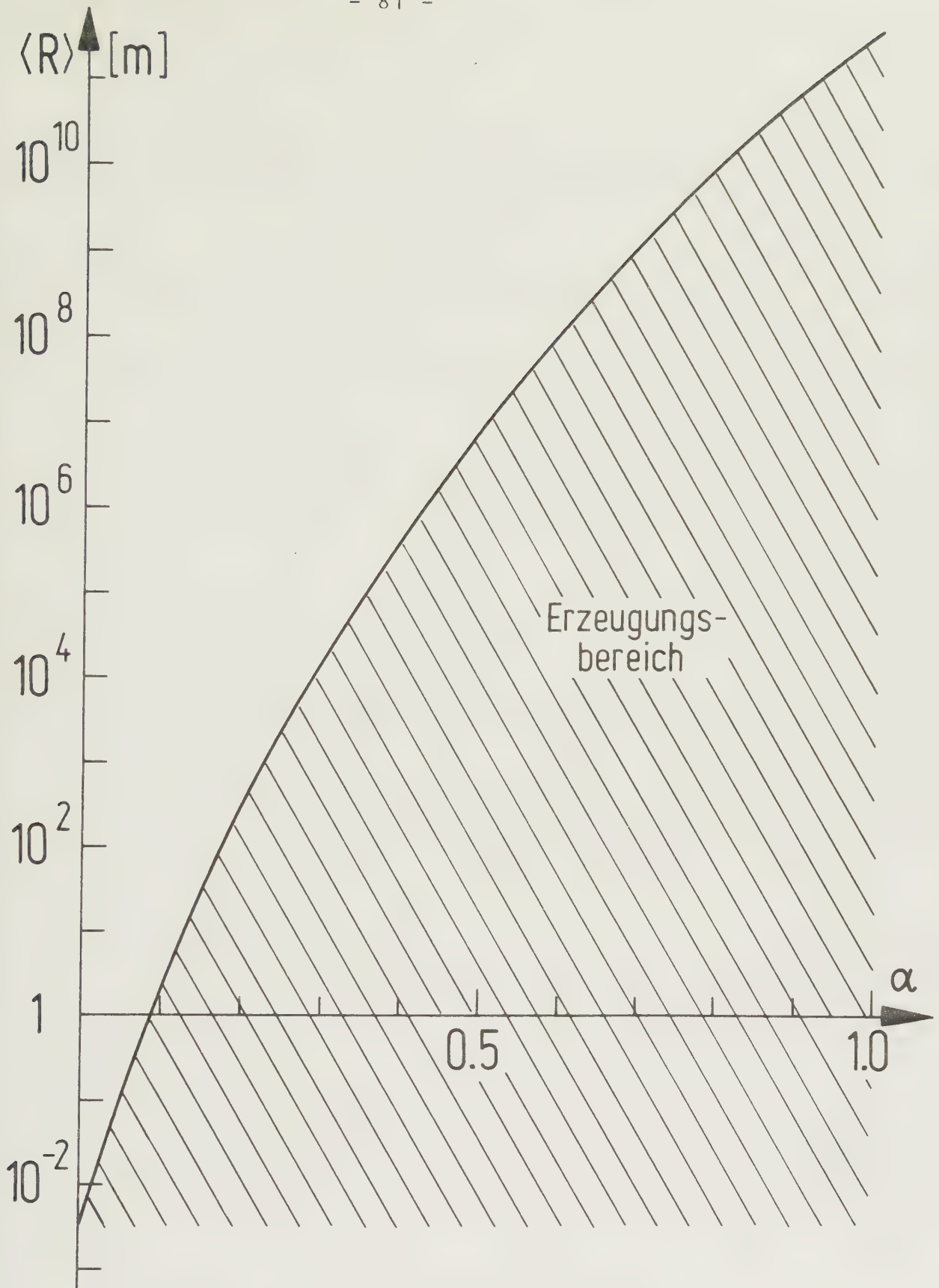


Abb. 14b zeigt den mittleren Erzeugungsradius $\langle R \rangle$ in $[m]$, ebenfalls als Funktion von α .

nerierte Entropie diesen Wert nicht überschreiben.

Die Entropie ist definiert als⁽⁶¹⁾:

$$S = - \sum_n p_n \ln p_n \quad (5.42)$$

dabei ist p_n die Besetzungswahrscheinlichkeit eines Zustandes und es wird über alle Zustände summiert. Wir beschränken uns auf Fermionen und betrachten den Freiheitsgrad χ . Er kann unbesetzt bleiben (die Wahrscheinlichkeit dafür lautet $p_o = W_o$), oder er kann besetzt werden:

$$p_1 = W(\chi) = W_o e^{-\beta(\chi)} \quad (5.43),$$

wobei wir den Exponenten aus Gl. (5.28) mit β abgekürzt haben:

$$\beta = \chi \left(\frac{\chi}{\mu D_o} \right)^{\frac{3\alpha+1}{2}} \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma\left(\frac{3-3\alpha}{4}\right) \Gamma\left(\frac{7+3\alpha}{4}\right)} \quad (5.44)$$

Aus der Tatsache, daß die Summe der Wahrscheinlichkeiten über alle Zustände gleich Eins sein muß, folgt

$$W_o = (1 + e^{-\beta})^{-1} \quad (5.45)$$

Damit erhalten wir, daß die Entropie für einen Impuls χ folgende Gestalt hat:

$$\begin{aligned} S(\chi) &= - (p_o \ln p_o + p_1 \ln p_1) \\ &= \ln (1 + e^{-\beta}) + \frac{\beta e^{-\beta}}{1 + e^{-\beta}} \end{aligned} \quad (5.46)$$

wovon wir nur die erste Ordnung in $e^{-\beta}$ berücksichtigen wollen:

$$S(\chi) \sim (1 + \beta(\lambda, \chi)) e^{-\beta(\lambda, \chi)} \quad (5.47)$$

setzen wir $\lambda = (D_0 \mu)^{\frac{3\alpha+1}{2}}$, so können wir den üblichen Trick aus der statistischen Physik anwenden (dort tritt die Temperatur T an die Stelle von λ):

$$\beta e^{-\beta} = \lambda \frac{d}{d\lambda} e^{-\beta} \quad (5.48)$$

und wir erhalten

$$\frac{d^3 S}{dx^3} = \sum_{\chi} S(\chi) = \frac{d}{d\lambda} \lambda \sum_{\chi} e^{-\beta} \quad (5.49)$$

$\sum_{\chi} e^{-\beta}$ ist aber gerade die Anzahl der erzeugten Teilchen

$\frac{d^3 N}{dx^3}$ (Gl. 5.37), und wir erhalten somit direkt:

$$\frac{d^3 S}{dx^3} / \frac{d^3 N}{dx^3} = \frac{\alpha+3}{\alpha+1} \quad (5.50)$$

Die Entropie pro erzeugtem Teilchen ist somit in unserem Problem eine Zahl der Größenordnung 1. Wenn von den ursprünglich erzeugten Teilchen nur ein gewisser Bruchteil Δ überlebt hat, dann ist die durch die Teilchenproduktion entstandene Entropie bezogen auf die heutige Teilchenzahl von der Größenordnung $1/\Delta$. Aufgrund der experimentell gemessenen Entropie und der Tatsache, daß eine einmal erzeugte Entropie nicht wieder abnehmen kann, folgt, daß $\frac{1}{\Delta} < 3 \cdot 10^9$ sein muß. Dies be-

findet sich nicht im Widerspruch zur Beobachtung, wenn mehr als $\text{ca. } 10^{-9}$ der ursprünglich erzeugten Teilchen die Paar-Rekombination überstanden haben.

5.4 Diskussion eines Weltmodells mit konformaler Metrik und dem Expansionsgesetz $R^2 = R_0^2 + R_1^2 \eta^2$

Ein Weltmodell, das erlaubt, die Singularität am Ursprung des Universums zu vermeiden, wurde von Audretsch und Schäfer^(27,28) vorgeschlagen.

Das Linienelement ds^2 wird mit Hilfe der Variablentransformation

$\frac{dt}{R(t)} = d\eta$ in der folgenden Weise geschrieben:

$$ds^2 = R^3(\eta) (d\eta^2 - d\sigma^2) \quad (5.51)$$

und für $R(\eta)$ machen wir den Ansatz:

$$R^2 = R_0^2 + R_1^2 \eta^2 \quad (5.52)$$

Ein derartiges Modell genügt nicht den Friedmann-Gleichungen; es beschreibt ein Universum, das bei $\eta = 0$ ($t = 0$) einen gewissen minimalen Krümmungsradius R_0 hat und dann expandiert, und zwar für große Zeiten mit $R \cong \sqrt{2 R_1 t}$. R_1 bestimmt also die Geschwindigkeit der Expansion. Die Wahl von $R_0 \neq 0$ erlaubt es - im Gegensatz zu allen aus den Einsteingleichungen abgeleiteten Weltmodellen -, die Singularität zu vermeiden; $R_0 \rightarrow 0$ liefert den Übergang zum big-bang-Modell.

Einsetzen des Expansionsgesetzes (5.52) in Gl. (2.51) liefert sofort:

$$W(\chi) = \exp \left\{ - 2 \operatorname{Im} \int_C \sqrt{\mu^2 (R_0^2 + R_1^2 \eta) + \chi^2} d\eta \right\} \quad (5.53)$$

Der Verzweigungspunkt ist gegeben durch:

$$\eta_0 = - \frac{i}{R_1} \sqrt{\frac{\chi^2}{\mu^2} + R_0^2} \quad (5.54)$$

Mit der Substitution $\eta = -$ is folgt daraus:

$$W(\chi) = \exp \left\{ - 4 \int_0^{\frac{1}{R_1} \sqrt{\chi^2/\mu^2 + R_0^2}} \sqrt{(\mu^2 R_0^2 + \chi^2) - s^2 (\mu R_1)^2} ds \right\} \quad (5.55)$$

Eine elementare Integration liefert die Erzeugungsrate:

$$W(\chi) = e^{-\pi \left\{ \frac{\mu R_0^2}{R_1} + \frac{\chi^2}{\mu R_1} \right\}} \quad (5.56)$$

und die Integration dieses Ausdrucks über $d\chi$ gemäß Gl. (3.19) führt zur Anzahl der erzeugten Teilchen:

$$N = \frac{(R_1 \mu)^{3/2}}{2\pi} e^{-\frac{\pi R_0^2 \mu}{R_1}} \quad (5.57)$$

Diese Resultate stimmen genau mit dem von Audretsch und Schäfer auf komplizierterem Wege erhaltenen Ergebnis überein. Bei der Interpretation der Gleichungen (5.56) und (5.57) wollen wir uns im Wesentlichen auf die Auswirkungen, die die Vermeidung der Singularität hat, beschränken, da das Expansionsgesetz (5.52) keine Lösung der Friedmann-Gleichung darstellt.

Auch im allgemeinen Friedmann-Universum kann man künstlich einen minimalen Radius einführen, indem man $R^2(t)$ ersetzt durch

$R^3(t) + R_0^2$. In diesem Fall geht wie beim Audretsch-Schäfer-Modell χ^2 über in:

$$\chi_{\text{eff}}^2 = \chi^2 + R_0^2 \mu^2 \quad (\text{vgl. Gl. 5.55})$$

Vergleichen wir mit Gl. (5.28), so sehen wir, daß, während bei Anwesenheit der Singularität für kleine χ $W(\chi) \cong 1$ war, nach Einführung des minimalen Radius immer

$W(\chi) < \exp(-\mu R_0 (\frac{R}{D_0})^{\frac{3\alpha+1}{2}} \cdot f(\alpha))$ ist. Die Teilchenproduktion kann nur stattfinden, wenn der Exponent kleiner oder vergleichbar mit Eins ist: $\mu R_0 (\frac{R}{D_0})^{\frac{3\alpha+1}{2}} < 1$. Auflösen nach R_0 ergibt, daß dies gleichbedeutend ist mit

$$R_0 \leq D_0 (\mu D_0)^{-\frac{2}{3(\alpha+1)}} = \langle R \rangle ,$$

wobei der mittlere Produktionsradius $\langle R \rangle$ der Gl. (5.41) entnommen ist. Das Ergebnis ist anschaulich verständlich, denn Teilchen können nur produziert werden, wenn das Universum in seiner Entwicklung in den schraffierten (Produktions-) Bereich der Abb. (14 b) gelangt. Umgekehrt bestätigt diese Überlegung nochmals, daß das früher berechnete $\langle R \rangle$ wirklich den Produktionsbereich eingrenzt.

6. Untersuchung eines anisotropen Weltmodells

In allen bisher untersuchten Modelluniversen wurde die Isotropie zur Voraussetzung genommen. Dies entspricht der Beobachtung. Theoretisch gibt es jedoch keinen zwingenden Grund dafür, daß ausgerechnet dieser unwahrscheinliche Fall realisiert sein sollte (siehe A4).

6.1 Anisotropie und das Kasner-Universum

Im Folgenden untersuche ich deshalb ein anisotropes Modelluniversum im Hinblick auf möglicherweise vorhandene Einflüsse auf die Teilchenerzeugung. Der wesentliche Gesichtspunkt der Untersuchung ist dabei die Frage, ob die Teilchenerzeugung einen isotropisierenden Effekt auf das Universum ausüben kann. Diese Vermutung ist, meines Wissens, zuerst in einer Arbeit von Zeldovich ⁽²⁹⁾ geäußert worden, daß nämlich bei Anisotropie die verstärkte Teilchenproduktion zur Ausbildung der Isotropie führen könnte.

Es gibt im Prinzip zwei Möglichkeiten, Universen geringer Symmetrie zu untersuchen. Die eine, hier im weiteren nicht verfolgte Methode ^(73,74) besteht in der Untersuchung der Auswirkung kleiner, auf das Friedmann-Modell wirkender Störungen. Analysen dieser Art erweisen sich besonders bei der Untersuchung der Galaxienbildung als fruchtbar und sind in der Lage, eine theoretische Obergrenze für die Anisotropie der 3K-Hintergrundstrahlung zu liefern, die sie in Zusammenhang mit Irregularitäten von Druck- und Dichteverteilung im frühen Universum setzen, also zu jenem Zeitpunkt, an dem die Strahlung

erzeugt wurde.

Eine zweite Möglichkeit ist, sehr große Abweichungen von der Symmetrie des Friedmann-Modells zuzulassen, sie jedoch auf einige ausgewählte Freiheitsgrade zu beschränken. Diesen Weg werden wir im Folgenden gehen, da er für analytische Untersuchungen besser geeignet erscheint.

Als Modell verwenden wir das Kasner-Universum ⁽⁷⁵⁾ mit der folgenden Metrik:

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} dx_1^2 - t^{2p_2} dx_2^2 - t^{2p_3} dx_3^2 \quad (6.1)$$

wobei $\sum p_i = \sum p_i^2 = 1 \quad (6.2)$

Die Kasner-Metrik ist Lösung der Einstein-Gleichung im materiefreien Fall.

Dieses Modell beschreibt ein Universum, dessen Expansionsgeschwindigkeit t^{p_i} entlang der verschiedenen Achsen x_i unterschiedlich ist. Und zwar kontrahieren die Entfernungen entlang einer Achse, während sie in den anderen beiden Richtungen expandieren. Diese Eigenschaft kann man aus Gl. (6.2) ablesen, da die Bedingung an die p_i mathematisch bedeutet, daß eines der p_i negativ sein muß. Da alle p_i gleichberechtigt sind, können wir o.B.d.A. schreiben:

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0 \quad (6.3)$$

Ein Beobachter in einem Kasner-Universum sieht das einfallende Licht der Sterne in einer Richtung blau verschoben, während er in den anderen Richtungen die gewöhnliche Rotverschiebung beobachtet, allerdings in verschiedenen Richtungen und verschiedener Stärke ($p_3 \neq p_2$!).

6.2 Teilchenerzeugung im Kasner-Universum

Setzen wir die Kasner-Metrik $g_{\alpha\beta}$

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -t^{2p_1} & & \\ & & -t^{2p_2} & \\ 0 & & & -t^{2p_3} \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

in die Hamilton-Jacobi-Gleichung (Gl.3.1)

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} \quad (6.5)$$

ein, so können wir wieder wie in Anhang (A1) einen Separationsansatz machen:

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S_1(t)}{\partial t} \right)^2 - t^{-2p_2} \left(\frac{\partial S_1(x_1)}{\partial x_1} \right)^2 - t^{-2p_2} \left(\frac{\partial S_2}{\partial x^2}(x_2) \right)^2 - t^{-2p_3} \left(\frac{\partial S_3}{\partial x_3}(x_3) \right)^2 \right\} \quad (6.6)$$

Die Bezeichnung $S_i(x_i)$ beschreibt den jeweils von x_i abhängigen Anteil der Wirkungsfunktion S . Zur Durchführung der Separation vergleiche man A1; wir erhalten für die Zeitableitung der Wirkung, d.h., für die Energie:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \sqrt{\mu^2 + \gamma_1^2 t^{-2} p_1 + \gamma_2^2 t^{-2} p_2 + \gamma_3^2 t^{-2} p_3} \quad (6.7)$$

Dieser Ausdruck läßt keine analytische Lösung der Gleichung für die Teilchenerzeugungswahrscheinlichkeit zu. Mit Hilfe der Beziehung (6.2):

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1 \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 &= 1 \end{aligned} \quad (6.8)$$

und der daraus folgenden Bedingung (6.3)

$$-\frac{1}{3} \leq p_1 \leq 0 \quad (6.9)$$

kann man für (6.7) eine Abschätzung finden, indem man p_2 (oder, was wegen der Symmetrie in den Richtungen x_2 und x_3 dasselbe ist, p_3) durch p_1 ausdrückt und dann nur noch den führenden Term unter der Wurzel berücksichtigt. Wir erhalten nach einigen elementaren Umformungen:

$$p_2 = \frac{1}{2} (1 - p_1) + \sqrt{\frac{1-p_1}{4} (3p_1+1)} > 0 \quad (6.10)$$

$$p_3 = \frac{1}{2} (1 - p_1) - \sqrt{\frac{1-p_1}{4} (3p_1+1)} > 0 \quad (6.11)$$

wobei wir p_2 (willkürlich) den größeren der beiden Werte zugeordnet haben.

Nun können wir das Verhalten des Exponenten der Zeit t diskutieren:

$$t^{-2p_1} = t^{2|p_1|} \quad \Rightarrow \text{beliebiges Anwachsen für große Zeiten.}$$

$$t^{-2p_2}, t^{-2p_3} \quad \Rightarrow \text{beliebiges Anwachsen für kleine Zeiten,}$$

t^{-2p_2} wächst schneller der Term mit p_3 .

mit: $p_2, p_3 > 0; p_3 < p_2$

Aus diesem Überlegungen ergibt sich also:

1. für kleine Zeiten sind die Terme mit p_2 dominant.
2. für große Zeiten sind die Terme mit p_1 dominant.

Die Masse μ ist in keinem dieser Grenzfälle von Einfluß, da t^{-2p_1} bzw. t^{-2p_2} jeweils stärker wachsen als die Konstante μ . Lediglich in einem Zwischenbereich, also für "mittlere" Zeiten, kann der Wert von $\partial S / \partial t$ im wesentlichen durch μ bestimmt werden, d.h., dort ist μ nicht vernachlässigbar.

Da das volle Problem der analytischen Behandlung nicht zugänglich ist, untersuchen wir die Teilchenerzeugung näherungsweise, indem wir den ganzen Bereich $0 < t < \infty$ in drei Abschnitte aufteilen (Abb. 15):

$$W_I = \exp \left\{ - 2 \operatorname{Im} \int_c \sqrt{\mu^2 + \gamma_2^2 t^{-2p_2}} dt \right\} \quad (6.12)$$

$$W_{II} = \exp \left\{ - 2 \operatorname{Im} \int_c \sqrt{\mu^2 + \gamma_1^2 t^{-2p_1}} dt \right\} \quad (6.13)$$

$$W_{III} = \exp \left\{ - 2 \operatorname{Im} \int_c \sqrt{\gamma_1^2 t^{-2p_1} + \gamma_2^2 t^{-2p_2}} dt \right\} \quad (6.14)$$

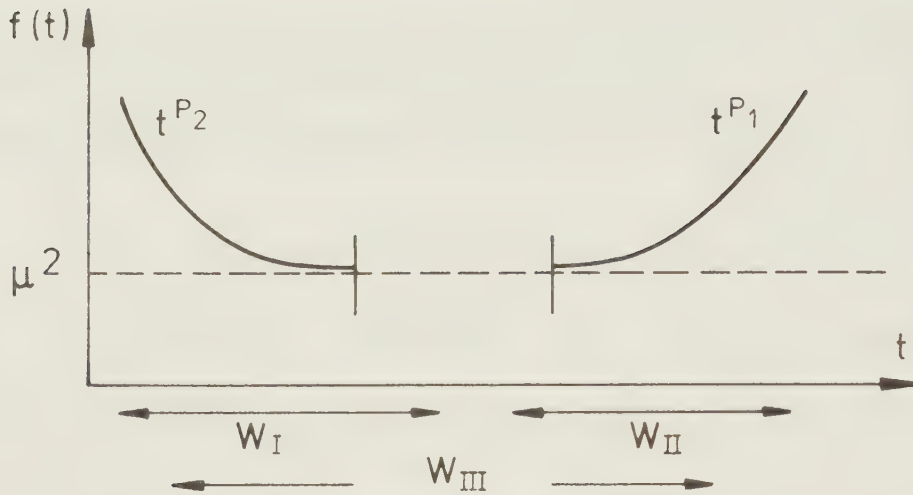


Abb. 15 zeigt das näherungsweise Verhalten der zeitabhängigen Terme der Kasner-Metrik für kleine, mittlere und große Zeiten. Die Pfeile unter der Zeitachse bezeichnen die Integrationsbereiche (Dabei wird W_{III} nur über die beiden Randbereiche integriert).

Betrachten wir zunächst den Bereich (6.12), bei dem die Zeitfunktion für kleine Zeiten durch t^{-2p_2} und für "mittlere" Zeiten durch μ bestimmt wird.

Die Bestimmung des Verzweigungspunktes erfolgt wieder aus der Bedingung $\frac{\partial S}{\partial t} = 0$, also:

$$\begin{aligned} \mu^2 + \gamma_2^2 t^{-2p_2} &= 0 \\ \tau &= \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{\gamma_2}{\mu} \right)^{\frac{1}{p_2}} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Die Integration verläuft also zwischen den Grenzen Null und τ ,
und wir erhalten:

$$W_I = \exp \left\{ 4 \operatorname{Im} \int_0^{\left(\mu e^{-\frac{i\pi}{2}} \gamma_2\right)^{\frac{1}{p_2}}} t^{-p_2} \sqrt{t^{-2p_2} \mu^2 + \gamma_2^2} dt \right\} \quad (6.16)$$

Mit Hilfe der Substitution $t = \left(\frac{e^{-\frac{i\pi}{2}}}{\mu} \gamma_2\right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot s$ können wir
das Integral vereinfachen:

$$W_I = \exp \left\{ 4 \operatorname{Im} \left(e^{\frac{i\pi}{2}} \mu \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{\gamma_2}{\mu} \right)^{\frac{1}{p_2}} \int_0^1 s^{-p_2} \sqrt{1 - s^{2p_2}} ds \right) \right\} \quad (6.17)$$

Dieses Integral läßt sich analytisch lösen ⁽⁶⁴⁾ und wir erhalten nach einigen Umformungen:

$$W_I = \exp \left\{ 4 \operatorname{Im} \left(\mu e^{\frac{i\pi}{2}} \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{\gamma_2}{\mu} \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1-p_2}{2p_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2p_2}\right)} \right) \right\} \quad (6.18)$$

Den Imaginärteil berechnen wir wie folgt:

$$\operatorname{Im} \left(e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{i\pi}{2p_2}} \right) = \operatorname{Im} \left(e^{-\frac{i\pi}{2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right)} \right) = -\sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \quad (6.19)$$

und erhalten dann daraus für die Teilchenerzeugungsrate in
einer Kasner-Metrik für kleine Zeiten:

$$W_I = \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma_2}{\mu} \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot C_I \right\} \quad (6.20)$$

mit

$$C_I = \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{p_2} - 1 \right) \frac{2 \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{1-p_2}{2p_2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2p_2}\right)} \quad (6.21)$$

Im Folgenden soll nun die Gl. (6.13) gelöst werden, also für

ein Zeitverhalten, der zunächst durch μ^2 und für große Zeiten durch große Werte von $t^{2|p_1|}$ bestimmt wird:

$$W_{II} = \exp \left\{ - 2 \operatorname{Im} \int_C \sqrt{\mu^2 + \gamma_1^2 t^{2|p_1|}} dt \right\} \quad (6.22)$$

Der Verzweigungspunkt wird wieder aus der Bedingung

$$\begin{aligned} \mu^2 + \gamma_1^2 t^{2|p_1|} &= 0 \\ \text{zu } \tau &= \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{\mu}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{|p_1|}} \end{aligned} \quad (6.23)$$

bestimmt. Die Integration verläuft also von Null nach τ und wieder zu Null zurück; mit Hilfe der Substitution

$$t = \left(e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{\mu}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{|p_1|}} s \quad \text{folgt für Gl. (6.22):}$$

$$W_{II} = \exp \left\{ 4 \operatorname{Im} \left[\left(e^{-\frac{i\pi}{2}} \frac{\mu}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{|p_1|}} \mu \int_0^1 \sqrt{1-s^{2|p_1|}} ds \right] \right\} \quad (6.24)$$

Dieses Integral läßt sich ebenfalls ⁽⁶⁴⁾ lösen, und wir erhalten nach einigen Umformungen:

$$W_{II} = \exp \left\{ -\mu \left(\frac{\mu}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{|p_1|}} \cdot C_{II} \right\} \quad (6.25)$$

mit

$$C_{II} = \sin\left(\frac{\pi}{2|p_1|}\right) \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2|p_1|}\right)}{|p_1| \Gamma\left(\frac{3|p_1|+1}{2|p_1|}\right)} \quad \text{und } 0 \leq |p_1| \leq \frac{1}{3} \quad (6.26)$$

Es bleibt nun noch die Gleichung (6.14) zu lösen, die das Zeitverhalten der Kasner-Metrik für kleine Zeiten durch große Werte von t^{-2p_2} und für große Zeiten durch große Werte von $t^{2|p_1|}$ approximiert. Wir haben also:

$$W_{III} = \exp \left\{ - 2 \operatorname{Im} \int_C \sqrt{\gamma_1^2 t^{2|p_1|} + \gamma_2^2 t^{-2p_2}} dt \right\} \quad (6.27)$$

mit $0 \leq |p_1| \leq \frac{1}{3}$ und $0 < p_2 < 1$ zu lösen. Die Bestimmung des Verzweigungspunktes liefert aus den üblichen Bedingungen:

$$\tau = (e^{-\frac{i\pi}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1}}) \frac{1}{|p_1| + p_2} \quad (6.28)$$

durch Einsetzen der Grenzen und der Substitution

$$t = (e^{-\frac{i\pi}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1}}) \frac{1}{p_2 + |p_1|} \cdot s \quad (6.29)$$

gelangen wir zu

$$W_{III} = \exp \left\{ 4 \cos \frac{\pi}{2} \left(\frac{2|p_1| + 1}{|p_1| + p_2} \right) \cdot \gamma_1^2 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \frac{2|p_1| + 1}{|p_1| + p_2} \int_0^1 s^{p_1} \sqrt{s \frac{p_2}{|p_1|} - 1} ds \right\} \quad (6.30)$$

Dieses Integral ist analytisch lösbar, sofern die folgende einschränkende Bedingung an die Variablen p_1 und p_2 erfüllt wird:

$$|p_1| \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{p_2}{2}} - \frac{1}{2} \quad (6.31)$$

Wir erhalten dann:

$$W_{III} = \exp \left\{ -\gamma_1^2 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right) \frac{2|p_1| + 1}{|p_1| + p_2} \cdot C_{III} \right\} \quad (6.32)$$

mit

$$C_{III} = \sin \frac{\pi}{2} \left(\frac{|p_1| + 1 - p_2}{|p_1| + p_2} \right) \cdot \frac{2\sqrt{\pi}}{(|p_1| + 1)} \frac{\left(\frac{|p_1| (|p_1| + 1)}{p_2} - \frac{1}{2} \right)}{\left(\frac{|p_1| (|p_1| + 1)}{p_2} \right)} \quad (6.33)$$

6.3 Isotropisierung des Raumes durch Teilchenerzeugung

Fassen wir zur Diskussion der Resultate die Erzeugungsraten der drei Teilapproximationen der Kasner-Metrik zusammen

(vgl. Abb. 15):

$$W_I = \exp \left\{ - \left(\frac{\gamma_2}{\mu} \right)^{\frac{1}{p_2}} \cdot C_I \right\}, \quad 0 < p_2 < 1 \quad (6.34)$$

$$W_{II} = \exp \left\{ - \mu \left(\frac{\mu}{\gamma_1} \right)^{\frac{1}{|p_1|}} \cdot C_{II} \right\}, \quad 0 \leq |p_1| \leq \frac{1}{3} \quad (6.35)$$

$$W_{III} = \exp \left\{ - \gamma_1^2 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^{\frac{2|p_1|+1}{|p_1|+p_2}} \cdot C_{III} \right\}, \quad 0 < p_2 < 1 \quad (6.36)$$

$$0 \leq |p_1| \leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{p_2}{2}} < \frac{1}{2}$$

Zur Bestimmung der Anzahl der erzeugten Teilchen ist wieder eine Integration über γ notwendig. Im Gegensatz zu unseren früheren Ergebnissen sehen wir hier jedoch, daß

$$\lim_{\gamma_1 \rightarrow \infty} W_{II,III}(\gamma_1, \dots) = 1, \quad ,$$

das Integral über γ_1 divergiert also und wir können keinen Ausdruck für die Teilchenzahl angeben. γ_1 steht im Nenner, weil p_1 eine negative Größe ist, d.h., die Divergenz der Teilchenzahl hat ihre Ursache in der Anisotropie, die ja mathematisch durch negatives p_1 beschrieben wurde. Vergleichen wir die Gleichungen (6.34) bis (6.36), so finden wir bei Gl. (6.35) die stärkste negative Potenz von γ_1 , d.h., dieser Ausdruck dominiert im Erzeugungsspektrum.

Da die Teilchenzahl unendlich ist, kann man natürlich die Rückwirkung dieser produzierten Teilchen auf die Metrik nicht vernachlässigen. Es ist also durchaus möglich, daß eine Berücksichtigung der Rückwirkung eine Isotropisierung des Universums

bewirken würde, was sich allerdings in diesem Rahmen nicht behandeln läßt. Über Versuche zur Berechnung der Teilchen-
erzeugung mit Rückwirkung siehe^(32,34).

7. Diskussion

Betrachten wir nun die erhaltenen Resultate in ihren Konsequenzen für unsere Vorstellungen von Materie bei hoher Energie und die frühen Epochen des Universums.

Eine Möglichkeit ist, daß die nach meinen Rechnungen bestimmte Teilchenerzeugung im Gravitationsfeld mit der Materie im Weltall nichts zu tun hat.

Die andere Möglichkeit ist, davon auszugehen, daß die heutige Materie im Universum in der Tat durch die Expansion erzeugt worden ist. Die heutige Zahl der Baryonen pro Einheitsvolumen R^3 beträgt 10^{78} , die der Photonen in der Hintergrundstrahlung 10^{87} . Falls diese aus der Rekombination ursprünglich miterzeugten Materie und Antimaterie stammen, müßten also ursprünglich ca. 10^{87} Teilchen erzeugt worden sein. Eine verbleibende relative Teilchen-Antiteilchen-Asymmetrie in der Größenordnung 10^{-9} kann im Rahmen der vereinigten Eichtheorien erklärt werden ⁽⁷¹⁾. Die Zahl der erzeugten Teilchen muß also im Bereich

$$10^{78} \leq \frac{dN}{d^3x} \leq 10^{87}$$

liegen mit einer gewissen Bevorzugung der oberen Grenze. Betrachten wir nun die Alternativen:

1. Man kann annehmen, daß die in der Teilchenphysik heute allgemein akzeptierten Vorstellungen von Materie bei hohen

Dichten und Energien vollkommen unzutreffend sind, also zum Beispiel ein Phasenübergang zum Quarkgas bei Kompression der Kernmaterie nicht stattfindet. Statt dessen gilt $p \rightarrow \vartheta$ (irgendwo oberhalb der Kerndichte). Nach der Diskussion in Kap. (5.3) ergibt sich dann für die Zahl der produzierten Teilchen $N \approx 10^{82}$ oder einige wenige Größenordnungen mehr.

2. Bei Kompression vollzieht die Kernmaterie den Übergang zur Quarkmaterie mit "asymptotischer" Freiheit. Bei einigen hundert GeV überschreitet jedoch die Zahl der erzeugbaren Quarkflavors die magische Grenze von 16 und die asymptotische Freiheit bricht zusammen ⁽⁸¹⁾. Danach geht die Zustandsgleichung in den Grenzfall $p = \vartheta$ über. Für die Zahl der erzeugten Teilchen gilt das unter (1) Gesagte. Der Weltradius, bei dem der Zusammenbruch der asymptotischen Freiheit erfolgt, muß dabei vergleichbar oder größer als $\langle R(\alpha=1) \rangle$ sein.
3. Es verbleibt als letzte Möglichkeit, daß die Quarks in der komprimierten Materie bis zu beliebigen Energien asymptotisch frei bleiben. Dann ist $p = \vartheta/3$ die zutreffende Zustandsgleichung. Um dennoch die Zahl der Teilchen zu erklären, muß man annehmen, daß für μ nicht mehr die Protonenmassen, sondern eine Masse zwischen 10^{10} und 10^{16} GeV in Gl. (5.15) einzusetzen ist, wieder mit Präferenz für die obere Grenze. Elementarteilchen dieser Masse werden in den Eichtheorien der "grand unification" postuliert, um die Symmetriebrechung in Leptonen und Quarks erklären zu können ^(71,82).

In diesem Fall wären also ursprünglich sehr schwere farbige Higgs-Bosonen erzeugt worden, die dann in andere Elementarteilchen zerfallen würden. Dabei ist noch bemerkenswert, daß diese Bosonen nach Yoshimura ⁽⁷¹⁾ auch für die Teilchen-Antiteilchenasymmetrie verantwortlich sein könnten.

Anhang A 1

Äquivalenz der Hamilton-Gleichung und der Geodätischen

Die Gleichung der Geodätischen in einem Riemannschen Raum lautet:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \lambda \end{matrix} \right\} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad \text{A (1)}$$

In diesem Anhang soll die Äquivalenz dieser Gleichung (für ungeladene Teilchen) mit den beiden folgenden Hamiltonschen Gleichungen nachgewiesen werden:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu}(x^\alpha) p_\mu p_\nu \quad \text{A (2)}$$

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \quad \text{und} \quad \frac{dp_\mu}{d\lambda} = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} \quad \text{A (3), A (4)}$$

Die erste Gleichung liefert:

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} = g^{\mu\nu} p_\nu = p^\mu \quad \text{A (5)}$$

So daß wir sofort den Zusammenhang zwischen dem affinen Parameter λ und der Eigenzeit τ erhalten:

$$\tau = m_0 \lambda \quad \text{A (6)}$$

Dabei ist m_0 die Ruhemasse und wir haben:

$$p^\mu = m_0 \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad \text{A (7)}$$

Der Ausdruck $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ hat die Bedeutung der Vierer-Geschwindigkeit.

Mit folgenden Umformungen:

$$p_{\mu} = g_{\mu\nu} p^{\nu} = g_{\mu\nu} m_0 \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad A (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma}) = \frac{\partial}{\partial \lambda} (\delta^{\mu}_{\sigma}) = 0 \quad A (9)$$

$$g^{\mu\nu}{}_{|\lambda} g_{\nu\sigma} = - g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma|\lambda} \quad A (10)$$

erhalten wir für die linke Seite von Gl. (A.4):

$$\frac{dp_{\mu}}{d\lambda} = m_0 \frac{d}{d\tau} (m_0 g_{\mu\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau}) = m_0^2 \left[g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} + g_{\mu\nu|\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right] \quad A (11)$$

und für die rechte Seite der Gl. (A.4):

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^{\mu}} = -\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{1}{2} g^{\nu\lambda} p_{\nu} p_{\lambda} \right) = -\frac{1}{2} g^{\nu\lambda}{}_{|\mu} p_{\nu} p_{\lambda} \quad A (12)$$

da die Ableitung $p_{\nu|\mu}$ verschwindet, da die Impulse im Hamilton-Formalismus unabhängige Koordinaten sind.

Für p_{ν} wird nun die Beziehung (A.8) und für $g^{\nu\lambda}{}_{|\mu} g_{\nu\sigma}$ Gl. (A.10) verwendet:

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^{\mu}} = \frac{1}{2} g_{\nu\sigma|\mu} p^{\sigma} p^{\nu} = \frac{1}{2} m_0^2 g_{\nu\lambda|\mu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad A (13)$$

Die Gl. (A.4) gewinnt damit die Form:

$$m_0^2 \left(g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^{\nu}}{d\tau^2} + g_{\mu\nu|\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} m_0^2 g_{\nu\lambda|\mu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad A (14)$$

Mit der Umformung:

$$2g_{\mu\nu|\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = g_{\mu\nu|\lambda} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} + g_{\mu\lambda|\nu} \frac{dx^{\lambda}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} \quad A (15)$$

erhalten wir:

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{1}{2} (g_{\mu\nu|\lambda} + g_{\mu\lambda|\nu} - g_{\nu\lambda|\mu}) \frac{dx^\lambda}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad A (16)$$

Überschieben mit $g^{\mu\sigma}$ erlaubt die Schreibweise der Geodätischen in der üblichen Form:

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu \lambda \end{matrix} \right\} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0 \quad A (17)$$

Anhang A 2

Die Separation der Hamilton-Jacobi-Gleichung

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{1}{R^2 \Sigma^2(k)} \left(\frac{\partial S}{\partial \vartheta} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{R^2 \Sigma^2(k) \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad A (18)$$

soll mit Hilfe des Separationsansatzes (3.4)

$$S(\lambda, x^\alpha) = S_\lambda(\lambda) + S_t(t) + S_\chi(\chi) + S_\vartheta(\vartheta) + S_\varphi(\varphi) \quad A (19)$$

gelöst werden, wobei $S_i(x^i)$ jeweils nur von der Koordinate x^i abhängen soll. Die Durchführung der Separation sei im Folgenden am Beispiel der Separation nach λ erläutert:

Alle von λ abhängigen Terme werden auf die eine, alle von unabhängigen Terme auf die andere Seite der Gleichung gebracht:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_\lambda(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial S_t(t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial S_\chi(\chi)}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{1}{R^2 \Sigma^2(k)} \left(\frac{\partial S_\vartheta(\vartheta)}{\partial \vartheta} \right)^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{R^2 \Sigma^2(k) \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial S_\varphi(\varphi)}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad A (20)$$

Da beide Seiten von unterschiedlichen Variablen abhängen, können sie nur dann die Gleichung erfüllen, wenn sie konstant sind.

Ferner ist $\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \mathcal{H} = \frac{1}{2} p^\alpha p_\alpha \geq 0$, weil für massive Teilchen der Viererimpuls ein zeitabhängiger Vektor ist. Wir schreiben also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \mu^2 \\ \mu^2 = \left(\frac{\partial S_t(t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial S_\chi}{\partial \chi} \right)^2 - \frac{1}{R^2 \Sigma^2} \left(\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta} \right)^2 - \frac{1}{R^2 \Sigma^2 \sin^2 \vartheta} \left(\frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi} \right)^2 \end{aligned} \quad A (21)$$

Mit der zweiten Gleichung wird die Separation fortgesetzt, durch sukzessives Auflösen nach $\frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta}$, $\frac{\partial S_\chi}{\partial \chi}$ und zuletzt $\frac{\partial S_t}{\partial t}$ (Eine andere Reihenfolge ist natürlich auch möglich). Führt man die Separation in dieser Weise durch, so ergeben sich folgende Gleichungen:

Auflösen von Gl. (A.21) nach $(\frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi})^2$ liefert:

$$p_\varphi^2 = \left(\frac{\partial S_\varphi}{\partial \varphi}\right)^2 = \xi^2 \quad \text{A(22)}$$

$$\xi^2 = R^2 \Sigma^2 \sin^2 \vartheta \left\{ -\mu^2 + \left(\frac{\partial S_t}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial S_\chi}{\partial \chi}\right)^2 - \frac{1}{R^2 \Sigma^2} \left(\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta}\right)^2 \right\} \quad \text{A(23)}$$

Diese Gleichung lösen wir nach $\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta}$ auf:

$$p_\vartheta^2 = \left(\frac{\partial S_\vartheta}{\partial \vartheta}\right)^2 = \eta^2 - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta} \quad \text{A(24)}$$

$$\eta^2 = R^2 \Sigma^2(k) \left\{ -\mu^2 + \left(\frac{\partial S_t}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial S_\chi}{\partial \chi}\right)^2 \right\} \quad \text{A(25)}$$

und die dadurch erhaltene Beziehung wird nach $\frac{\partial S_\chi}{\partial \chi}$ aufgelöst:

$$p_\chi^2 = \left(\frac{\partial S_\chi}{\partial \chi}\right)^2 = \gamma^2 \frac{\eta^2}{\Sigma^2(k)} \quad \text{A(26)}$$

$$\gamma^2 = R^2 \left\{ -\mu^2 + \left(\frac{\partial S_t}{\partial t}\right)^2 \right\} \quad \text{A(27)}$$

woraus wir schließlich die gesuchte Energie $\frac{\partial S_t}{\partial t}$ erhalten:

$$p_t^2 = \left(\frac{\partial S_t}{\partial t}\right)^2 = \mu^2 + \frac{\gamma^2}{R^2} \equiv \mu^2 + \frac{1}{R^2} \left[p_\chi^2 + \frac{1}{\Sigma^2(k)} (p_\vartheta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \vartheta}) \right]$$

bzw.:

$$\frac{\partial S(t)}{\partial t} = E^{(\pm)}(t) = \sqrt{\mu^2 + \frac{\gamma^2}{R^2(t)}} \quad \text{A(28)}$$

Anhang A 3

Das Zeldovich-Modell für Materie hoher Dichte

Zeldovich ⁽⁶²⁾ untersuchte als erster baryonische Materie, deren Wechselwirkung durch ein Spin-1-Feld vermittelt wird. Die Annahme, daß das System stationär sei, erlaubt, die potentielle Energie der Wechselwirkung mit einem Yukawa-Potential zu beschreiben:

$$\Phi = \frac{g}{r} e^{-r/\lambda} \quad \text{A (29)}$$

wobei g^2 die Konstante der starken Wechselwirkung und λ ihre Reichweite bedeuten. Die gesamte Energie pro Baryon (mit Masse m) hängt dann mit der Baryonenzahldichte n zusammen:

$$E = m + \frac{1}{2} g^2 n \int \Phi d^3x = m + 2\pi g^2 n \lambda^2 \quad \text{A (30)}$$

Die Energiedichte ist folglich:

$$\rho = E_n = nm + 2\pi g^2 n^2 \lambda^2 \quad \text{A (31)}$$

Wenn die Reichweite λ unabhängig von der Dichte ist, wird der Druck gegeben durch

$$p = n^2 \frac{dE}{dn} = 2\pi^2 (gn\lambda)^2 \quad \text{A (32)}$$

Für ansteigende Dichte geht $n \rightarrow \infty$, die potentielle Energie der Wechselwirkung dominiert und wir erhalten:

$$p \sim \rho \sim n^2 \quad \text{A (33)}$$

Diese Rechnung darf nur als Abschätzung verstanden werden, da angenommen wurde, daß man das statische Wechselwirkungspotential der N Baryonen als Summe von Zwei-Körper-Potentialen darstellen kann. Diese Approximation ist sicher bei niedriger Dichte gut, bricht aber zusammen, wenn $\rho \rightarrow \infty$ geht und Vielkörperpotentiale die Wechselwirkung bestimmen.

Dieses vereinfachte klassische Modell wurde von Walecka^(63,68,69) verbessert, der ein relativistisches quantenfeldtheoretisches Modell für Materie hoher Dichte vorschlug, welches die Wechselwirkung der Baryonen untereinander durch neutrale Skalar- und durch Vektormesonfelder beschreibt. Damit kann die Eigenschaft der langreichweitigen Anziehung und kurzreichweitigen Abstoßung der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung beschrieben werden, die im wesentlichen für die Sättigung der Kernmaterie verantwortlich sind. Auch in seinem Modell gilt bei hohen Dichten $p \approx \rho$.

Anhang A 4

J. Barrows Untersuchungen zur Zustandsgleichung $p = \varrho$

Die Hypothese einer harten Zustandsgleichung für hochenergetische Materie führt zu interessanten Konsequenzen für die hadronische Epoche des Universums und liefert insbesondere einige Hinweise, weshalb das Universum eine so hohe Symmetrie aufweist.

Nach Barrow ⁽⁷⁷⁾ ist eine harte Zustandsgleichung aus folgenden Gründen gegenüber anderen bevorzugt:

1. Das allgemeine Verhalten der kosmologischen Lösungen der Einsteingleichungen im Vakuum, für materie- und strahlungsdominierten Universen gilt nicht mehr bei Anwesenheit von harten Flüssigkeiten ($p = \varrho$), siehe dazu ⁽⁷⁸⁾ und Referenzen darin. Lediglich für $p = \varrho$ -Zustandsgleichungen treten bei Annäherung an die Singularität ($t \rightarrow 0$) keine divergierenden Dichte-, Geschwindigkeits- und Gravitationsstörungen auf. Bei anderen Zustandsgleichungen muß man ohne guten Grund annehmen, daß diese divergenten Moden abwesend sind.
2. Das Wachstum von Geschwindigkeitsstörungen und Wirbelstrukturen mit der Zeit ermöglicht die Existenz von Wirbeln (d.h., rotierenden Galaxien); ohne daß auf künstliche Postulate zu ihrer Einführung zurückgegriffen werden müßte. Ebenso können bei $p = \varrho$ großräumige Magnetfelder von selbst als eine Konsequenz der Theorie auftreten. Dies ist ebenfalls nicht möglich für $p \leq \frac{1}{3} \varrho$.

3. Die Abwesenheit von Schockwellen (wegen $v_s = c$) und die Vermeidung der schwarzen Minilöcher setzt der Nichtlinearität der Hydrodynamik in der Nähe der Singularität eine natürliche Grenze.
4. Schließlich existiert die Möglichkeit, daß die spezifische Entropie des Universums in diesem Modell durch Dissipation kleiner Störungen in der Nähe der Singularität erzeugt wurde. Für strahlungsdominierte Universen ist die spezifische Entropie bislang nicht erklärt, während bei Universen mit $p \approx 0$ eine extrem anisotrope Dynamik zur Erklärung notwendig ist. Derartige Irregularitäten stehen jedoch im Widerspruch zur Beobachtung der Hintergrundsstrahlung ⁽⁷⁹⁾ und der Verteilung der leichten Elemente ⁽⁸⁰⁾.

Literaturverzeichnis

1. P. Dirac, Proc.R.Soc. A 126, 360 (1930)
2. C.D. Anderson, Phys.Rev.41, 405 (1932)
3. F. Sauter, Z.Phys.69, 742 (1931)
4. F. Sauter, Z.Phys.73, 547 (1935)
5. W. Pieper, W. Greiner, Z.für Phys.218, 327 (1969)
6. S.Gershtein, Ya.Zeldovich, Lett.Nuovo Cim 1, 835 (1969)
7. B.Müller, H.Peitz, J. Rafelski, W. Greiner, Phys.Rev.Lett. 28, 1235 (1972)
8. Backe H, Handschug L, Hessberger H, Vicent P, Nakayama Y and Greenberg J.S. 1978 Phys.Rev.Lett. 40 1443
9. C.Kozuharov, P. Kienle, E. Berdermann, H. Bokemeyer, J.S.Greenberg, Y.Nakayama, P. Vincent, H.Backe, L.Handschug and E. Kankeleit, Phys.Rev.Lett. 42, 376 (1979)
10. E. Schrödinger, Physica 6, 899 (1939)
11. B. de Witt, Phys.Rev. 90, 357 (1953)
12. L. Parker, Phys.Rev.Lett. 21, 562 (1968)
13. L. Parker, Phys.Rev. 183, 1057 (1969)
14. L. Parker, Phys.Rev. D3, 346 (1971)
15. L. Parker, Phys. Rev.Lett. 28, 705 (1972)
16. H.Rumpf, Dissertation, Wien 1977; und: Nuovo Cim 35B, 321(1976)
17. S.G.Mamaev, V.M.Mosepanenko, A.A.Starobinskij, Sov.Phys.JETP 43, 823 (197) (Zh.Eksp.Teor.Fiz.70 1577 (1976)
18. G.W.Gibbons, S.W. Hawking, Phys.Rev. D15, 2738 (1971)
19. D.Lohiya, H.Panchapakesan, J.Math.Phys.A11, 1963 (1978)
20. A.S. Lapedes, J.Math.Phys. 19 (11), 2289 (1978)
21. D.M.Chitre, J.B.Hartle, Phys.Rev. D16, 251 (1977)
22. J. B. Hartle, S.W.Hawking, Phys.Rev. D.13, 2188 (1976)
23. A.S.Lapedes, Phys.Rev. D17, 2556 (1978)
24. N.D.Birrell, Momentum space techniques for curved spacetime quantum field theory,
Dept.of Math., King's College, London 1978 (prepr)
25. G.Schäfer, H.Dehnen,Astron.Astrophys.54, 823 (1977);
61, 671 (1977)
26. J.Audretsch, G.Schäfer, J.Phys.A11, 1583 (1978)
27. J.Audretsch, G. Schäfer, Phys.Lett. 66A, 459 (1978)
28. J.Audretsch, G. Schäfer, "Thermal particle production in a contracting and expanding Universe without singularity"
preprint Konstanz (1978)

29. Ya.B.Zeldovich, ZhETF Pid.Red.12, 443 (1970)
(JETP.Lett. 12, 307 (1970))
30. Ya.B.Zeldovich, A.A. Starobinskij, Zh.Eksp.Teor.Fiz.61, 2161
(1972); JETP 34, 1159 (1972);
31. V.N.Lukash, A.A.Starobinskij, Zh.Eksp.Teor.Fiz.66 1515 (1974)
(JETP 39, 742 (1974))
32. L. Parker, S.A.Fulling, Phys.Rev. D7, 2357 (1973)
33. S.Hawking, G.Ellis "The large scale structure of space-time,
Cambridge, Mon-on Mathematical Physics 1973
34. B.L. Hu, L.Parker, Phys.Rev. D17, 933 (1978)
Einen ausführlichen Überblick über das kosmologische Standardmodell findet man in:
35. S.Weinberg, Gravitation and Cosmology, New York 1972, § 15.6
36. W.Kundt, Survey of Cosmology, in: Springer Tracts in modern
Physics, Vol. 58, Berlin 1971
37. R.P.Feynman, A.R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals
(McGraw-Hill, New York, 1965)
38. Ref. 37, Seite 33 f
39. D. Lurié, Particles and Fields, New York 1968 (Kap. 10.5)
40. J.H. Duru, H. Kleinert, Phys.Lett. 84B, 185 (1979)
41. M.S.Marinov, V.S.Popov, Fortschr.Physik 25, 373 (1977)
42. P.Roman, Introduction to Quantum Field Theory, New York 1969
43. D.W. McLaughlin, J.Math.Phys. 13, 1099 (1977)
44. R.P.Feynman, A.R.Hibbs, ---- (Ref. 37), § 3.5
45. J.D.Jackson, Classical Electrodynamics, New York 1962
46. J. Schwinger, Phys.Rev. 82, 664 (1951)
47. C. Misner, K. Thorne, J.A.Wheeler, Gravitation,
San Francisco 1970, S. 897 f
48. R. Adler, M.Bazin, M. Schiffer, Introduction to General
Relativity, New York 1965
49. B. Carter, Phys.Rev. 174, 1559 (1968)
50. W.Greiner, H.Diehl, Theoretische Physik II, Frankfurt 1974,
S. 258
51. L.Landau, E.Lifschitz, Theoretische Physik III, Berlin 1967,
S. 58 ff.
52. H.Rumpf, Dissertation (vgl.Ref. 16); § V.4 (S. 103 ff)
53. de Sitter, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. 19, 1217 (1917) und
20, 229 (1917)
54. S. Weinberg, Gravitation (vgl. Ref. 35), S. 615
55. R. Gilmore, "Lie Groups, Lie Algebras, and some of their
Applications", New York 1974, Seite 453

56. H.P. Robertson, T.W. Noonan, "Relativity and Cosmology",
Philadelphia 1968, (besonders § 16.2)
57. S. Fulling, Phys.Rev. D7, 2850 (1973)
58. W. Unruh, Phys.Rev. D14, 870 (1976)
59. M. Soffel, B. Müller, W. Greiner, Dirac-particles in Rindler
Space, preprint, Frankfurt 1979
60. S. Weinberg, "Gravitation ... (vgl. Ref. 35)"; Seite 472
61. L. Landau, E. Lifschitz, Theoretische Physik V (statist. Physik),
Berlin 1967
62. Ya. B. Zeldovich, Sov. Phys. JETP 14, 1143 (1962)
63. J. D. Walecka, Ann. Phys. 83, 491 (1974)
64. J. S. Gradshteyn, J. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and
Products", New York 1965, Gl. 3, 251.1
65. Ref. 64, Seite 1950
66. R. Hagedorn, Cargese Lecture in Physics 5, Edinburgh 1973
67. G. Gamow, Nature 162, 680 (1948)
68. J. D. Walecka, Phys. Lett. 59B, 109 (1975)
69. S. A. Chin, J. D. Walecka, Phys. Lett. 52B, 24 (1974)
70. Y. A. Canuto, Ann. Rev. Astr. Astrophys. 12, 178 (1974) und
13, 335 (1975)
71. M. Yoshimura, Phys. Rev. Lett. 41, 281 (1978)
72. S. Weinberg, Gravitation ... (Ref. 35), S. 517
73. Peebles, P. J. E., Proc. Roy. Astron. Soc. Canada 63, 4 (§30.1), 1969
Peebles, J. T. Yu., Astrophys. J. 162, 815 (1970)
74. Ya. Zeldovich, Novikov, "Relativistic Astrophysics Vol. II,
The Universe and Relativity,
Chicago 1974 (§§ 23.1, 28, 30.1)
75. E. Kasner, Am. J. Math. 43, 217 (1921)
76. K. Freed, J. Chem. Phys. 56, 692 (1972)
77. J. D. Barrow, Nature 272, 211 (1978)
78. P. S. Wesson, J. Math. Phys. 19, 2283 (1978)
79. J. D. Barrow, Nature 267, 117 (1977)
80. R. V. Wagoner, Astrophys. J. 179, 343 (1973)
81. E. Poggio, H. Quinn, S. Weinberg, Phys. Rev. D13, 1958 (1976)
82. Nach dem Modell von Georgi und Glashow, s. z. B. Phys. Rev. Lett 32
438 (1974); numerische Abschätzungen wurden gegeben von
A. J. Buras, J. Ellis, M. K. Gaillard, D. V. Nanopoulos, Nucl. Phys.
B 135, 66 (1978)
83. D. N. Schramm, R. V. Wagoner, Ann. Rev. Nucl. Sci 27, 37 (1977)
84. P. R. Feynman, ... (Ref. 37), Kapitel (4.1)

Lebenslauf

Ich, Angelika Müller, wurde am 4. Juni 1952 als Tochter von Dipl.-Ing. Gerhard Mahn und seiner Frau Ingeborg in Königstein/Ts. geboren.

Schul Ausbildung: 1959 - 1963 Volksschule in Frankfurt-
Unterliederbach
1963 - 1971 (Abitur) Besuch des Helene-Lange-
Gymnasiums in Frankfurt-Höchst

Studiengang:

Seit Herbst 1971 Physikstudium an der Johann-Wolfgang-Goethe-
Universität in Frankfurt

1972 und 1973 arbeitete ich als studentische Hilfskraft am
Astronomischen Institut der Universität

am 11.7.1973 legte ich die Diplom-Vorprüfung Physik mit
der Note "sehr gut" ab

1.9.1974 -
31.10.1975 USA-Aufenthalt und Studium an der University of
Washington (u.a. bei Prof.J.A.Wheeler) in
Seattle, Wash. (U.S.A.).

seit 1976 arbeite ich am Institut für theoretische Physik
der Universität Frankfurt.

am 24.6.1977 legte ich die Diplomprüfung mit einer Arbeit
über Gravitationsprobleme starker Felder mit
der Note "sehr gut" ab.

Seitdem arbeite ich als Doktorand am Institut für
theoretische Physik der Universität Frankfurt.

Angelika Müller

Danksagung

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. Walter Greiner, möchte ich an dieser Stelle für die während der Arbeit gewährte Unterstützung und für sein stetes Interesse an ihrem Fortgang danken.

Mein Dank gilt weiterhin den Kollegen des Institutes für theoretische Physik, insbesondere meinem lieben Mann und den Herren Dr. Jürgen Hofmann, Joachim Reinhardt und Wolfgang Schäfer die in vielen Diskussionen zu dieser Arbeit beigetragen haben, und Herrn Wilfried Betz für die geduldige Überlassung der Referenz (64) als Dauerleihgabe. Außerdem möchte ich Herrn Priv.Doiz.Dr. Hans-Joachim Fink, Farbwerke Hoechst AG, für einige interessante und aufschlußreiche Gespräche danken.

Nicht zuletzt bin ich Frau R. Hofmann für das Schreiben der Arbeit, Frau B. Utschig und Frl. G. Roth für das Zeichnen der Figuren und Herrn Brose für den Druck dankbar.

Die notwendigen numerischen Rechnungen wurden auf der Anlage der Gesellschaft für Schwerionenforschung, Darmstadt, durchgeführt, der ich für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit danke.

